Parabola, rette tangenti, area di un triangolo e di un segmento parabolico

Nel piano cartesiano si consideri la parabola $\lambda: y = x^2 - 3x$ e si risolvano i quesiti che seguono.

1) Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva nel suo punto A avente ascissa x=1.
2) Considerato il punto B(1;-3) si provi che è esterno alla parabola e determinare le equazioni delle rette tangenti condotte da detto punto alla curva; siano P e Q i due punti di contatto delle tangenti con la parabola.
3) Rappresentare la parabola e le rette tangenti trovate.
4) Determinare l'area del triangolo di vertici B, P e Q e l'area del segmento parabolico avente per base la corda PQ. Confrontare le aree delle due figure piane.

Soluzione

1) Il punto A ha ordinata y=-2, dunque A(1;-2).
   a. Scriviamo l'equazione del fascio proprio di rette avente come centro A e tra queste determiniamo l'equazione della retta tangente alla curva.

      $F: y+2 = m(x-1)$, da cui $y = mx - m - 2$.

   b. Impostiamo il sistema con l'equazione della parabola e quella del fascio, quindi determiniamo l'equazione risolvente ed imponiamo la condizione che quest'ultima abbia radici coincidenti, dunque che il suo discriminante sia nullo.

      $\begin{cases} y = mx - m - 2 \\ y = x^2 - 3x \end{cases}$, l'equazione risolvente è $x^2 - (m+3)x + m + 2 = 0$

      Deve risultare $\Delta = (m+3)^2 - 4(m+2) = 0$, da cui $m^2 + 2m + 1 = 0$, soddisfatta per m=-1.

      Concludiamo che l'equazione della retta tangente in A è $t_A: y = -x - 1$.

2) Si riconosce che il punto B è esterno alla parabola osservando che la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto e che B ha la stessa ascissa di A ma la sua ordinata è minore dell'ordinata di A, che appartiene alla curva.

   Equazioni delle rette tangenti condotte da B alla parabola

   Poiché il punto è esterno alla parabola esistono per esso due rette tangenti alla curva. Scriviamo l'equazione del fascio proprio di rette di centro B, quindi impostiamo il sistema tra detta equazione e quella della parabola, infine poniamo uguale a zero il discriminante dell'equazione risolvente; da tale condizione si ricaveranno i valori dei coefficienti angolari delle due rette tangenti.

   $F_B: y+3 = m(x-1)$ equazione del fascio proprio di centro B

$\begin{cases} y+3=m(x-1) \\ y=x^2-3x \end{cases}$, da cui si ha l'equazione risolvente $x^2-(m+3)x+m+3=0$, il cui discriminante deve essere nullo.

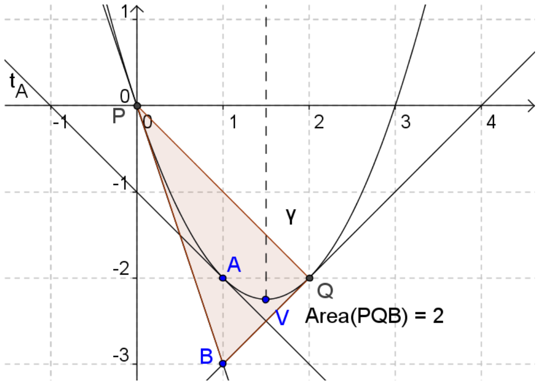
$\Delta=(m+3)^2-4(m+3)=0$, da cui $(m+3)(m-1)=0$; le due radici sono $m_1=-3$, $m_2=1$, ai quali valori corrispondono rispettivamente le rette tangenti

$t_1: y=-3x$; $t_2: y=x-4$.

Ricerca dei punti di contatto

La retta t_1 tocca la parabola nell'origine, quindi P(0;0).

La retta t_2 tocca la parabola nel punto di ascissa $x=2$; il punto è Q(2;-2)



3) La figura richiesta è riportata a margine.
4) Area del triangolo BQP

Si può determinare l'area del triangolo utilizzando il metodo del determinante del terzo ordine. Precisamente si ha:

$$Area(BQP)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(-2+6)=2$$

Area del segmento parabolico di base PQ

Ricordiamo la notevole proprietà del segmento parabolico secondo la quale l'area dello stesso è pari ai 2/3 dell'area del triangolo BQP che abbiamo appena determinato[1].

Dunque

$$Area(Seg\_Parab)=\frac{2}{3}\cdot Area(BQP)=\frac{4}{3}$$

Facciamo presente che l'area del segmento parabolico è anche uguale ai 2/3 del prodotto della misura della corda PQ con la misura dell'altezza del segmento parabolico; quest'ultima è la distanza tra la retta PQ e la retta tangente alla parabola parallela a PQ. Il lettore interessato verifichi la coincidenza qui dichiarata.

Per quanto precede, il rapporto tra l'area del segmento parabolico di base PQ e l'area del triangolo BQP vale 2/3.

[1] Per un'illustrazione di questa proprietà si consulti il lavoro http://www.matematicaescuola.it/materiale/geometria/analitica/parabola/Proprieta_del_segmento_parabolico_20130126_teoria_Sintesi.pdf . Il lavoro completo è riservato agli utenti registrati del sito.