Iperbole equilatera ed ellisse

Applicazione delle traslazioni e della simmetria centrale- Distanza tra rette parallele

Problema

1) Considerata l'equazione $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, determinare i valori dei parametri a, b, c, d in modo che la curva corrispondente sia un'iperbole equilatera avente centro in $C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ e passi da $A(-2;0)$.

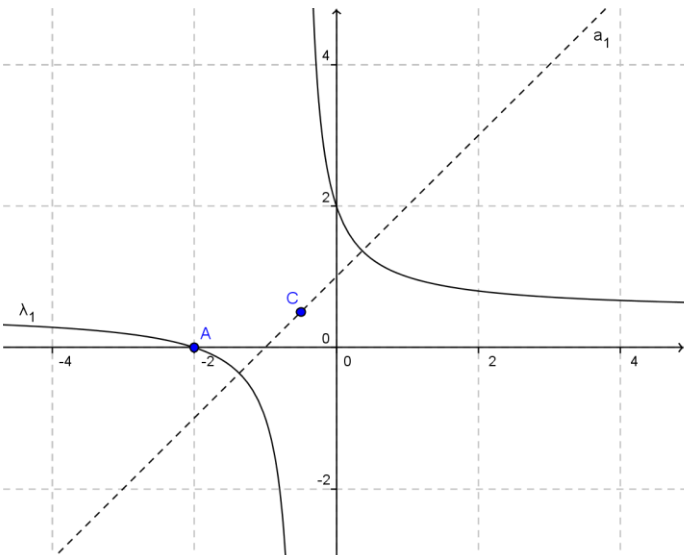
   Rappresentare l'iperbole λ_1 corrispondente all'equazione trovata.
2) Determinare l'equazione dell'iperbole equilatera λ_2 traslata di λ_1 avente centro nell'origine degli assi.
3) Sia P il punto di λ_2 avente ascissa 3. Scrivere l'equazione della retta **t** tangente a λ_2 in P e l'equazione della retta **t'** tangente a λ_2 nel simmetrico di P rispetto al centro di λ_2. Determinare la distanza delle rette **t**, **t'**.
4) Determinare l'equazione dell'ellisse λ_3 riferita ai suoi assi tangente a λ_2 in P. Determinare vertici, fuochi ed eccentricità dell'ellisse.
5) Realizzare una figura riepilogativa contenente tutti gli elementi geometrici elaborati nel problema.

Soluzione

1) Ricordiamo che l'equazione $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ rappresenta un'iperbole equilatera se risulta $c\neq 0$ e $ad-bc\neq 0$; in tal caso il centro dell'iperbole ha coordinate $\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ e dunque, dovendo essere il punto $C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ il centro dovrà risultare

$$-\frac{d}{c}=-\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{a}{c}=\frac{1}{2};$$

ne segue che $d=\frac{1}{2}c=a$, per cui l'equazione della curva si riduce alla forma $y=\frac{cx+2b}{2cx+c}$.



A questo punto, imponendo che le coordinate del punto A(-2;0) verifichino l'equazione si ha l'ulteriore condizione $-2c+2b=0$, da cui $b=c$. Si conclude che l'equazione della curva è

$$y=\frac{cx+2c}{2cx+c}, \text{ cioè } \lambda_1: y=\frac{x+2}{2x+1}.$$

2) La traslazione τ cui sottoporre l'iperbole λ_1 è quella determinata dal vettore $\vec{V}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, che trasforma il generico punto $(x;y)$ nel punto $(x';y')$ definita dalle equazioni

$$\tau:\begin{cases} x'=x+\frac{1}{2} \\ y'=y-\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'equazione dell'iperbole $\lambda_2=\tau(\lambda_1)$ trasformata nella suddetta traslazione è

$$\lambda_2=\tau(\lambda_1): y+\frac{1}{2}=\frac{x-\frac{1}{2}+2}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)+1}$$, che semplificata diventa $\lambda_2: xy=\frac{3}{4}$.

3) Il punto di $P\in\lambda_2$ avente ascissa 3 è $P\left(3;\frac{1}{4}\right)$.

L'equazione della retta tangente a λ_2 in P può essere ottenuta velocemente applicando la **formula di sdoppiamento**, secondo la quale, se $xy=k$ è l'equazione della curva e $P(x_0;y_0)$ è un suo punto, l'equazione della retta tangente nello stesso punto è

$$t_P:\frac{xy_0+yx_0}{2}=k.$$

Nel nostro caso si ha

$$t_P:\frac{\frac{1}{4}x+3y}{2}=\frac{3}{4}$$, da cui $t_P: x+12y=6$.

Punto P′ simmetrico di P rispetto al centro di λ_2

Osserviamo che il centro di λ_2 è l'origine degli assi cartesiani, dunque il punto P′ cercato è il simmetrico di $P\left(3;\frac{1}{4}\right)$ rispetto a detto centro ed è $P'\left(-3;-\frac{1}{4}\right)$.

Retta tangente a λ_2 in P′

Per ottenere l'equazione della retta tangente in P′ potremmo applicare nuovamente la formula di sdoppiamento; in questo caso, però, facciamo osservare che la stessa equazione si può ottenere applicando la **simmetria centrale di centro l'origine** alla retta t_P. Le equazioni della simmetria di centro O(0;0) sono

$$\sigma_O:\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}$$ (equazioni della simmetria centrale di centro l'origine degli assi)

e dunque l'equazione della retta **t'** è

$t'=t_{P'}=\sigma_O\left(t_P\right):-x-12y=6$, da cui $t_{P'}:x+12y=-6$.

Osserviamo che le due rette tangenti sono tra loro parallele: $t_P\,//\,t_{P'}$.

Distanza tra le rette t, t'

La distanza tra due rette parallele si può trovare determinando la distanza di un punto qualsiasi di una delle due rette dall'altra retta tramite la formula apposita che permette di calcolare la distanza di un punto qualsiasi da una retta. Nel nostro caso, essendo le rette parallele, possiamo applicare il metodo più veloce fornito dalla seguente

Regola per la distanza tra due rette parallele

Conosciute le equazioni di due rette r, r' parallele nelle forme

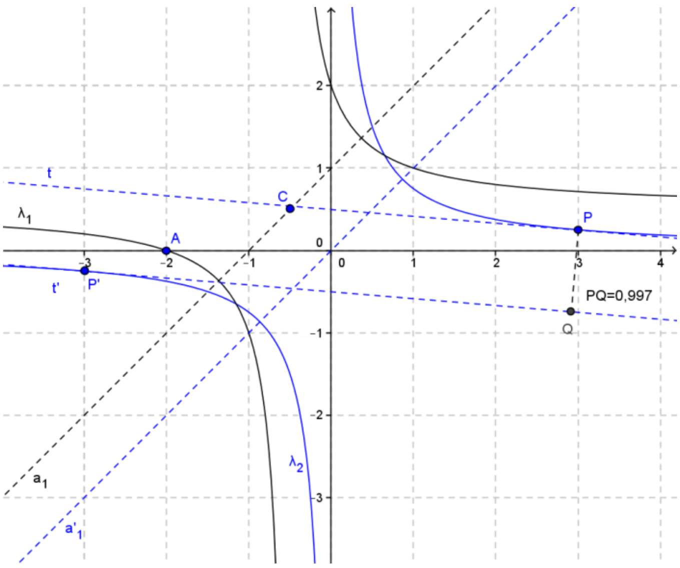
$r:ax+by+c=0$,
$r':ax+by+c'=0$,

la distanza tra le due rette è

$$d\left(r;r'\right)=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Dunque $d\left(t;t'\right)=$

$$\frac{|6+6|}{\sqrt{1+144}}=\frac{12}{\sqrt{145}}$$



4) L'ellisse λ_3 è cercata ha equazione $\lambda_3:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Imponendo che la curva passi dal punto $P\left(3;\frac{1}{4}\right)$ si ottiene l'equazione

$\frac{9}{a^2}+\frac{1}{16b^2}=1$, da cui $\frac{1}{b^2}=16\left(1-\frac{9}{a^2}\right)$,

per cui l'equazione diventa della forma

$$\frac{x^2}{a^2}+16\left(1-\frac{9}{a^2}\right)y^2=1$$

Per determinare il valore di a^2 è necessario imporre la condizione che l'ellisse sia tangente in P alla retta t; la condizione si ottiene impostando il sistema formato dall'equazione della retta tangente in questione e da quella dell'ellisse, ricavando l'equazione risolvente ed imponendo che questa abbia radici coincidenti, quindi che il suo discriminante sia nullo. Seguono le elaborazioni algebriche in sintesi.

$\begin{cases} t_P : x+12y=6 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+16\left(1-\dfrac{9}{a^2}\right)y^2=1 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} t_P : x=6-12y \\ \dfrac{(6-12y)^2}{a^2}+16\left(1-\dfrac{9}{a^2}\right)y^2=1 \end{cases}$

L'equazione risolvente ridotta alla forma normale è

$16a^2y^2-144y+36-a^2=0$ per la quale deve risultare

$\dfrac{\Delta}{4}=72^2-16a^2\cdot\left(36-a^2\right)=0$, che diventa $a^4-36a^2+18^2=0$, che scritta nella forma notevole

$\left(a^2-18\right)^2=0$, fornisce $a^2=18$.

L'equazione dell'ellisse cercata è $\lambda_3 : \dfrac{x^2}{18}+8y^2=1$

Vertici, fuochi ed eccentricità dell'ellisse

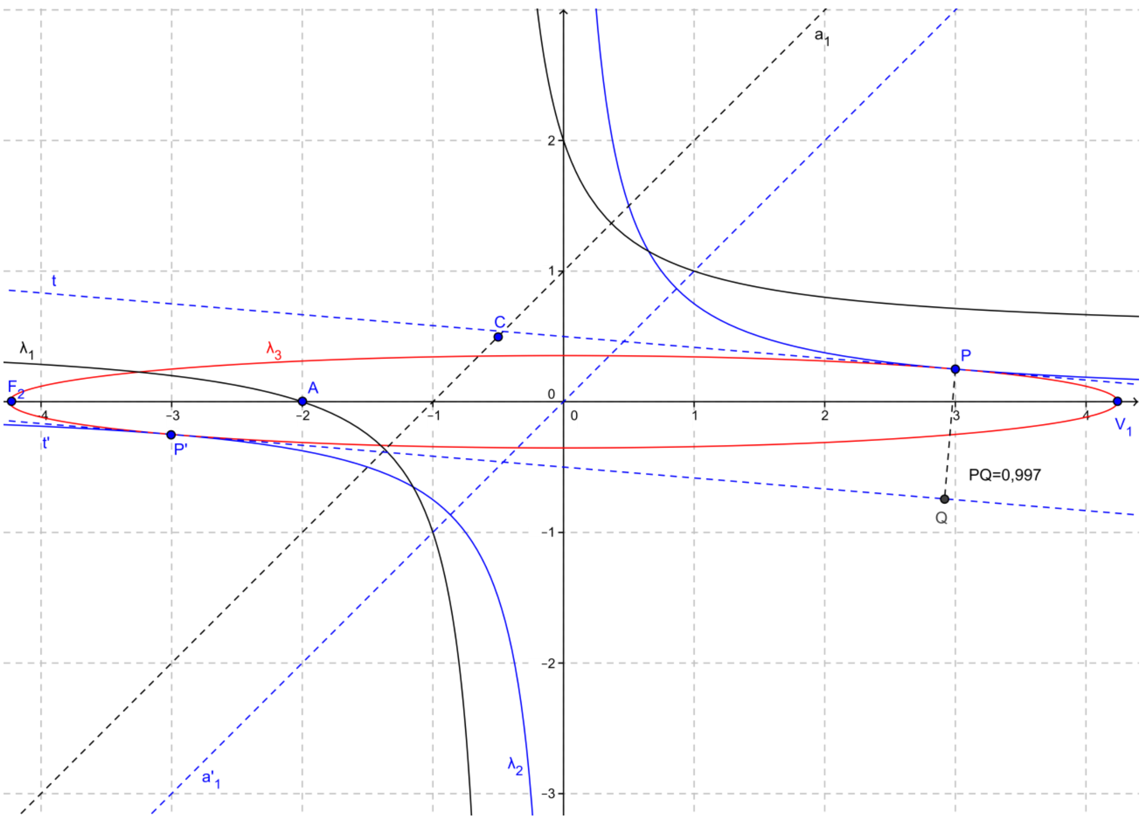
Vertici sull'asse delle ascisse: $V_1\left(3\sqrt{2};0\right)$, $V_2\left(-3\sqrt{2};0\right)$;

vertici sull'asse delle ordinate: $V_3\left(0;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $V_4\left(0;-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

I fuochi si trovano sull'asse delle ascisse: $F_1\left(\sqrt{\dfrac{143}{8}};0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{\dfrac{143}{8}};0\right)$

Eccentricità: $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{143}{8}}:3\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{143}}{12}$

5) La figura riepilogativa è riportata di seguito. Si noti che i due fuochi sono molto prossimi ai due vertici che si trovano sullo stesso asse e per questo è sono stati rappresentati solo il vertice V_1 e il fuoco F_2.


a1
t
λ1
λ3
C
P
F2
A
0
V1
t'
P'
PQ=0,997
Q
λ2
a'1