Geometria Analitica

Ellisse, Circonferenza, Retta

Problema

Q1) Determinare l'equazione dell'ellisse λ_1 riferita ai propri assi avente un vertice nel punto (4;0), i fuochi sull'asse delle ascisse e che hanno distanza unitaria dalla retta s:3x-4y=0. Determinare le coordinate dei fuochi e l'eccentricità dell'ellisse.

Q2) Determinare le equazioni perpendicolari alla retta s condotte dai fuochi F_1, F_2; siano H, K i punti in cui dette rette intersecano la retta s. Classificare il quadrilatero convesso di vertici F_1,F_2,H, K e trovarne il perimetro e l'area.

Q3) Scrivere l'equazione della circonferenza λ_2 avente come diametro il segmento HK e precisare se essa abbia punti in comune con l'ellisse.

Q4) Rappresentare nel sistema di riferimento degli assi dell'ellisse tutti gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

Q1) L'ellisse λ_1 riferita ai propri assi ha equazione cartesiana $\lambda_1 : \frac{x^2}{16}+\frac{x^2}{b^2}=1$, con b^2<16 perché i fuochi si trovano sull'asse delle ascisse. I fuochi sono i punti $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, con $c=\sqrt{16-b^2}$ ed è noto che essi hanno distanza unitaria dalla retta s:3x-4y=0. Applicando la formula che fornisce la distanza di un punto da una retta nel piano cartesiano determiniamo la distanza di uno dei due fuochi dalla retta s e poniamola uguale ad uno, in tal modo di otterrà un'equazione che permetterà di determinare il valore di b.

$$F_1\left(\sqrt{16-b^2};0\right);\ d(F_1;s)=\frac{\left|3\sqrt{16-b^2}-0\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1\rightarrow\frac{3\sqrt{16-b^2}}{5}=1\rightarrow\sqrt{16-b^2}=\frac{5}{3}\rightarrow b^2=16-\frac{25}{9}=\frac{119}{9}$$

L'equazione dell'ellisse è $\lambda_1 : \frac{x^2}{16}+\frac{9y^2}{119}=1$.

I vertici dell'ellisse sono $V_1(4;0)$, $V_2(-4;0)$, $V_3\left(0;\frac{\sqrt{119}}{3}\right)$, $V_4\left(0;-\frac{\sqrt{119}}{3}\right)$.

Coordinate dei fuochi

$$c=\sqrt{16-b^2}=\frac{5}{3}\quad\Rightarrow F_1\left(\frac{5}{3};0\right),\ F_2\left(-\frac{5}{3};0\right).$$

Eccentricità dell'ellisse

Ricordiamo che l'eccentricità dell'ellisse è definita come il rapporto tra la semidistanza focale ed il semiasse maggiore : $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}:4=\frac{5}{12}$

Q2) Le rette condotte dai fuochi e perpendicolari alla retta s:3x-4y=0 appartengono al fascio improprio di rette perpendicolari alla retta s la cui equazione è $F: 4x+3y+q=0$; sostituendo in quest'equazione prima le coordinate di F_1, quindi quelle di F_2, si determinano i rispettivi valori del parametro q relativi alle due rette cercate. Risulta:

$$F_1\left(\frac{5}{3};0\right)\in F \Rightarrow 4\cdot\frac{5}{3}+q=0 \rightarrow q=-\frac{20}{3} \rightarrow r_1: 4x+3y-\frac{20}{3}=0 \rightarrow r_1: 12x+9y-20=0;$$

$$F_1\left(-\frac{5}{3};0\right)\in F \Rightarrow 4\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+q=0 \rightarrow \ldots r_2: 12x+9y+20=0.$$

Ricerca dei punti H, K

Sia H il punto intersezione di r_1 con s:

$$\begin{cases} r_1: 12x+9y-20=0 \\ s: 3x-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12\cdot\frac{4}{3}y+9y-20=0 \\ 3x-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{4}{5} \\ x=\frac{16}{15} \end{cases};\ H\left(\frac{16}{15};\frac{4}{5}\right).$$

Per il punto K, intersezione di r_2 con s, osserviamo che è il simmetrico di H rispetto all'origine degli assi, dunque $K\left(-\frac{16}{15};-\frac{4}{5}\right)$.

Classificazione del quadrilatero F_1HF_2K

Il quadrilatero in oggetto è un parallelogramma perché ha i due lati opposti F_1H, F_2K che sono paralleli (perché perpendicolari alla retta s) e congruenti (perché i fuochi F_1, F_2 hanno dalla eretta s distanza unitaria).

Area e perimetro del quadrilatero

L'area del parallelogramma è il doppio dell'area del triangolo F_1HF_2, perciò si ha:

$$Area(F_1HF_2K)=\overline{F_1F_2}\cdot y_H = 2c\cdot y_H = 2\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{3}$$

Per il perimetro calcoliamo la misura del lato HF_2.

$$\overline{HF_2}=\sqrt{\left(\frac{16}{15}+\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{41^2}{9\cdot 25}+\frac{16}{25}}=\frac{1}{15}\sqrt{1825}=\frac{\sqrt{73}}{3}$$

$$Perim(F_1HF_2K)=2\left(\overline{F_1H}+\overline{HF_2}\right)=2\left(1+\frac{\sqrt{73}}{3}\right)$$

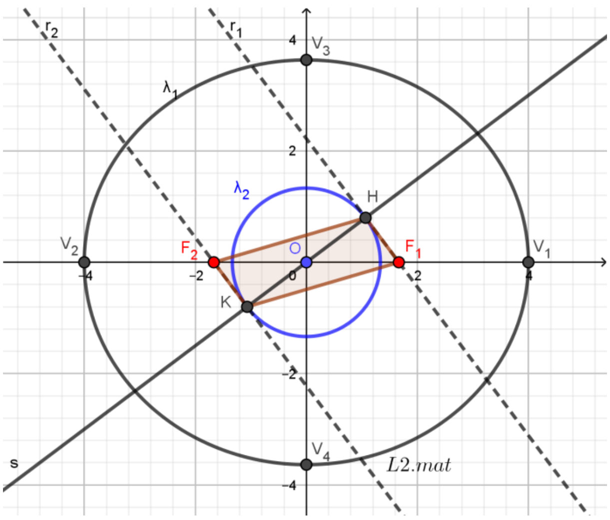

Figura 1

Q3) Equazione della circonferenza λ_2

La circonferenza in oggetto ha centro nell'origine O degli assi coordinati e raggio uguale alla distanza del punto H da O. Poiché risulta

$$\lambda_2 : x^2 + y^2 = \overline{OH}^2 \rightarrow \lambda_2 : x^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

la circonferenza è interna all'ellisse e perciò non ha alcun punto in comune con la stessa.

Q4) La figura contenente tutti gli elementi geometrici elaborati è riportata in Figura 1.