

**Programma di matematica svolto nel corso dell'a.s. 2011-12 nella classe 5D dell'Indirizzo PNI**  
(in riferimento a quanto concordato tra tutti i docenti di Matematica e Fisica).

Docente: Luigi LECCI

**Funzioni-** Richiamo del concetto di funzione. Classificazione delle funzioni. Determinazione del dominio e del codominio per alcune funzioni analitiche. Studio della positività di una funzione ed individuazione delle regioni del piano cartesiano in cui è contenuto il grafico. Grafici delle principali funzioni elementari. Composizione di funzioni analitiche e dominio della funzione composta. Costruzione di grafici di funzioni definite per mezzo di funzioni elementari.

**Elementi di topologia in R.** Insiemi numerici in R. Definizioni di maggiorante, di minorante, di estremo superiore e di estremo inferiore per un insieme numerico. Proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore. Teorema sull'unicità del  $\text{Sup}(A)$  e dell'  $\text{inf}(A)$ . Insiemi numerici limitati e insiemi non limitati. Definizione di massimo e di minimo per un insieme numerico. Studio di insiemi numerici definiti tramite successioni, con l'individuazione del  $\text{Sup}(A)$  e dell' $\text{Inf}(A)$ ; ricerca degli eventuali massimo e minimo.

Applicazioni- Studio di insiemi numerici descritti da espressioni razionali, es:  $x_n = \frac{3n+1}{4n+3}, n \in N$  ;

$$x_n = \frac{3}{n+3}, n \in N ; x_n = \frac{n^2+2}{n^2+3}, n \in N ; x_n = \frac{(-1)^n n+2}{n+1}, n \in N .$$

Proprietà del valore assoluto e relative dimostrazioni. Proprietà di densità dei numeri razionali e dei numeri irrazionali in R (solo enunciate) . Intervalli di R . Centro di un intervallo limitato e sua dimensione. Intorni di un punto  $x_0 \in R$ , di  $+\infty$  e  $-\infty$ . Interno di un insieme numerico- Frontiera di un insieme. Insiemi chiusi, aperti- Determinazione degli eventuali punti di accumulazione di un insieme numerico.

**Limiti-** Definizione generale di limite per una funzione ed esplicitazione dei nove casi ( $x_0 \in R, x_0 = +\infty, x_0 = -\infty, l \in R, l = +\infty, l = -\infty$ ) con illustrazione del concetto tramite lo svolgimento di numerosi esercizi su tutti i casi. Svolgimento di esercizi sulla verifica di limite per i diversi casi.

**Successioni-** Definizione di limite per una successione reale. Successioni regolari, successioni convergenti, successioni divergenti, successioni oscillanti. Teorema: Ogni successione convergente è limitata.

Verifica della definizione di limite per una successione.

**Teoremi sui limiti-** T. sull'unicità (dim), T. sul valore assoluto (dim), T. sulla permanenza del segno (dim), T. sul limite della funzione opposta (dim), T. sul limite della somma (dim), Teorema sul limite della differenza (dim), T. sulla forma equivalente del limite (dim).

**Limiti e Continuità (prima parte)**

Definizione di continuità in un punto per una funzione. Specie di discontinuità ( $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$ ).

Operazioni con i limiti. Altri teoremi sui limiti: Teorema sul limite del prodotto (dim), T. sul limite di  $1/f$  nel caso in cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$$

Teorema sul limite di un rapporto di funzioni (dim).

### Forme di indeterminazione

Studio di limiti delle forme indeterminate  $0/0$ ,  $\infty-\infty$ ,  $\infty/\infty$  per polinomi, per funzioni razionali fratte, per successioni numeriche.

Ricerca degli asintoti orizzontali e verticali per il diagramma di una funzione.

### Altri teoremi sui limiti

Teorema del confronto per tre funzioni (dei carabinieri) (dim.). Teorema sui limiti che si presentano nella forma  $\lambda/0$ , con  $\lambda \neq 0$ , (dim). Applicazioni. Teorema del confronto per due funzioni (dim).

Teorema della convergenza a zero per il prodotto di due funzioni (dim). Teorema della divergenza per la somma e la differenza di due funzioni (dim). Esercizi e applicazioni.

### Limiti notevoli

Infinitesimi e infiniti.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  e loro generalizzazioni: limiti per  $x \rightarrow x_0$  delle funzioni  $\sin \varphi(x)/\varphi(x)$ ,  $\operatorname{tg} \varphi(x)/\varphi(x)$ ,  $(1 - \cos \varphi(x))/\varphi(x)$ ,  $(1 - \cos \varphi(x))/\varphi(x)^2$ , ecc... dove  $\varphi(x)$  è infinitesima per  $x \rightarrow x_0$

Il numero di Nepero e limiti notevoli dedotti:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$  e loro generalizzazioni.

Altri limiti notevoli:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ ; con  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{arcsen} \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$ ,

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{arctg} \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$ . Applicazioni dei limiti notevoli allo studio di limiti che si presentano nelle

forme indeterminate:  $\infty/\infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$

### Infiniti e infinitesimi

Infiniti ed infinitesimi. Definizioni - Ordine di un infinito e di un infinitesimo - Confronto di infiniti e di infinitesimi - Infinitesimi equivalenti - Infiniti equivalenti. Parte principale di un infinitesimo e di un infinito. Infiniti ed infinitesimi non confrontabili. Esempi.

Determinazione degli eventuali asintoti obliqui del grafico di una funzione. Rappresentazione del grafico probabile di funzioni avvalendosi dello studio del segno e dei limiti.

**Successioni monotòne.** Principio di induzione (enunciato e dimostrato). Teorema fondamentale sulle successioni monotòne. Successioni di Cauchy e criterio di convergenza. Verifica di limiti di successioni. Calcolo di limiti di successioni. Progressioni aritmetiche e geometriche. Proprietà. Formule varie. Calcolo della somma di  $n$  termini consecutivi di una progressione aritmetica o geometrica. Inserimento di  $k$  termini aritmetici tra due valori assegnati; discussione del problema dell'inserimento di  $k$  termini medi geometrici tra due valori assegnati. Studio del limite della somma  $S_n$  dei primi  $n$  termini di una progressione geometrica, per  $n \rightarrow +\infty$ . Applicazioni numeriche e geometriche.

## Calcolo differenziale

Definizione di derivata di una funzione in un punto e funzioni derivabili. Differenziale di una funzione e suo significato geometrico. Il problema della tangente in un punto del diagramma di una funzione. Equazione della tangente o delle tangenti condotte da un punto al diagramma di una funzione  $y=f(x)$ . Applicazioni del concetto di differenziale. Significato geometrico della derivata. Derivate delle funzioni elementari. Derivata di una funzione composta. Studio dei punti angolosi e cuspidali. Teorema sulla derivata dell'inversa di una funzione e sua applicazione per il calcolo della derivata prima in un punto prestabilito per l'inversa di una funzione per la quale non sia possibile l'esplicitazione analitica in forma elementare. Applicazione delle derivate. Studio della derivabilità di una funzione. Comportamento del diagramma della funzione in un intorno di un punto  $x_0$  in cui la funzione non è derivabile. Esercizi sulla continuità e la derivabilità di funzioni parametriche e non definite per casi composte da funzioni razionali, irrazionali, esponenziali, logaritmiche, con e senza valori assoluti. Studio dei punti stazionari di una funzione. Caratterizzazione analitica dei punti di massimo o di minimo relativo tramite il rapporto incrementale. Teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy e relativi corollari. Teorema di De l'Hôpital e relative applicazioni (studio dei limiti notevoli  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \log x = 0$ , con  $r > 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r e^{-x} = 0$ , con  $r > 0$ ; limiti della forma  $0^0, 1^\infty, \infty^0$ ).

Applicazione fisica del concetto di derivata. Criterio sufficiente per la derivabilità di una funzione. Svolgimento di numerosi esercizi e problemi applicativi.

## Massimi e minimi relativi o assoluti

Punti di massimo e di minimo relativo e assoluto. Teorema di Fermat e applicazioni. Definizione e ricerca dei punti di flesso. Risoluzione di problemi di massimo e minimo. Studio completo del grafico di una funzione e relativa rappresentazione nel piano cartesiano. Risoluzione di numerosi problemi sulla ricerca del massimo o del minimo con applicazioni alla geometria analitica e alla geometria razionale (rettangolo di area massima inscritto in un triangolo, in una circonferenza, in un segmento parabolico), ricerca del cilindro o del cono di area o volume di valore minimo o massimo sotto determinati vincoli, ecc...

## Funzioni continue (seconda parte)

Teorema di Weierstrass, Teorema di Darboux<sup>(1)</sup>, Teorema di esistenza degli zeri. Applicazioni: Ricerca delle soluzioni di equazioni trascendenti (Es.  $2^{-x} + x^2 = 1$ ).

### Analisi numerica

Primo Teorema sull'unicità della radice dell'equazione  $f(x)=0$  in  $[a;b]$ , con  $f(x)$  continua e  $f(a)f(b)<0$ ,  $f'(x) \neq 0$  in  $]a;b[$ . Secondo teorema dell'unicità della radice per  $f(x)$  in  $[a;b]$  nelle ipotesi  $f(a)f(b)<0$ , esistenza di  $f'(x)$  e con  $f''(x)$  che in  $]a;b[$  mantiene lo stesso segno. Ricerca dello zero di una funzione con approssimazione prefissata. Metodo dicotomico. Metodo delle tangenti e delle secanti di Newton-Fourier e loro applicazioni.

### Concavità e punti di flesso.

Punti di flesso a tangente orizzontale (tramite lo studio del segno della derivata prima); punti di flesso a tangente obliqua tramite lo studio della concavità con il segno della derivata seconda; ricerca dei punti di flesso con il metodo delle derivate successive.

Studio della concavità. Teorema (dim.):  $\exists f''(x_0), f'''(x_0)>0 \Rightarrow \exists I(x_0)$  in cui il diagramma di  $f$  volge la concavità verso l'alto. Classificazione dei punti di flesso: ascendente, discendente (Teorema:  $y''(x_0)=0, y'''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$  punto di flesso ascendente).

Teorema generale (enunciato) per la ricerca dei punti di massimo relativo, di minimo relativo, di flesso, con le derivate successive.

### Integrali indefiniti.

Integrazione indefinita. Teorema sull'esistenza delle primitive per funzioni continue. Integrali immediati. Regole di integrazione. Metodo di integrazione per decomposizione (in particolare per le funzioni razionali fratte); integrazione per sostituzione e per parti. Applicazioni.

### Dettagli.

Enunciato del teorema sull'esistenza delle primitive per funzioni continue - Linearità dell'operatore integrale. Integrali immediati:  $\int dx, \int x^n dx,$

$$\int 1/x dx, \int x^{1/n} dx, \int \varphi'(x)/\varphi(x) dx, \int (ax+b)/(cx+d) dx, \int \sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx, \int \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx, \int a^x dx, \int a^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) dx, \int dx/(a^2+x^2), \int \varphi'(x)/(1+\varphi^2(x)) dx, \int \sqrt{a^2-x^2} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}} dx, \int [f(x)]^n f'(x) dx.$$

Metodi di integrazione per decomposizione, per sostituzione, per parti : applicazioni (integrali del

$$\text{tipo } \int x^n e^{kx} dx, \int x^n \sin x dx, \int x^n \cos x dx, \int x^n \log x dx, \int e^x \sin x dx, \int \arcsin x dx, \int \arccos x dx, \int \arctg x dx; \text{ integrali delle funzioni razionali fratte: } \int \frac{P(x)}{mx+n} dx, \int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} dx.$$

<sup>(1)</sup> Teorema di Darboux; Una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo  $[a;b]$  se è continua allora assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.

Integrazione di funzioni razionali fratte per le quali il polinomio al denominatore presenta radici semplici o multiple, reali o complesse. Integrali del tipo  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ , con  $R(x, \dots)$  funzione razionale;  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , con  $R(\dots, \dots)$  funzione razionale.

### **Integrali definiti.**

Il problema delle aree - Definizione di integrale definito di una funzione continua esteso ad un intervallo chiuso e limitato  $[a; b]$ - Costruzione delle successioni  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots, S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  ...delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori [Illustrazione intuitiva della dimostrazione della convergenza delle stesse all'unico valore  $\int_a^b f(x) dx$ ]- Definizione più generale di integrale definito tramite le somme integrali di Cauchy - Proprietà dell'integrale definito.

Teorema del valore medio. La funzione integrale ed il teorema fondamentale del calcolo integrale (teorema di Torricelli- Barrow) (dim.)

Calcolo dell'area del trapezoide e di una regione piana a contorno curvilineo costituito da archi di grafici di più funzioni. Calcolo del volume di un solido di rotazione descritto dalla rotazione di un trapezoide intorno all'asse delle ascisse o delle ordinate. Calcolo di volumi di solidi particolari.

Applicazioni fisiche degli integrali definiti. Calcolo della lunghezza di un arco di curva regolare<sup>(2)</sup>; calcolo dell'area di una superficie di rotazione descritta da un arco del grafico di una funzione  $y = f(x)$  in una rotazione attorno all'asse delle ascisse o attorno all'asse delle ordinate.

### **Integrali generalizzati estesi ad intervalli limitati o illimitati**

Funzioni integrabili in senso generalizzato - Calcolo dell'area di regioni illimitate o di volumi di regioni dello spazio illimitate.

Risoluzione di quesiti assegnati nelle precedenti prove dell'Esame di Stato nel Liceo Scientifico.

### **Integrazione numerica ( da sviluppare nel periodo dal 16-maggio alla fine dell'anno)**

Concetto di integrazione numerica. Calcolo di un integrale definito con il metodo dei rettangoli e con il metodo dei trapezi.

Risoluzione di problemi e quesiti assegnati nelle precedenti prove dell'Esame di Stato

Tricase, martedì 15 maggio 2012

Gli alunni

  

---

  

---

Luigi Lecci

---

<sup>(2)</sup> Questo argomento è da considerarsi un approfondimento.