Nota teorica sull'Effetto Doppler

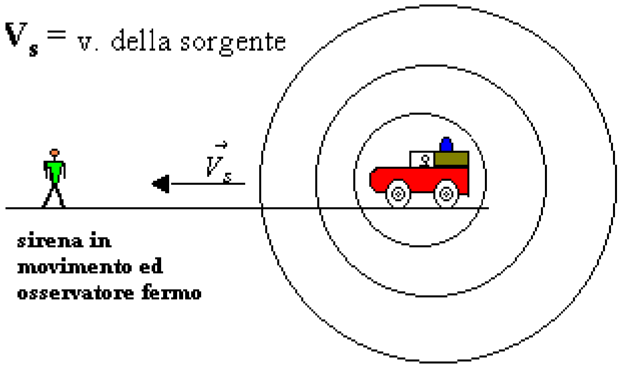
***Quando la sorgente sonora e l'osservatore sono in moto relativo reciproco l'osservatore ascolta il suono proveniente dalla sorgente sonora con una frequenza diversa rispetto a quella con la quale il suono viene emesso dalla sirena*.**
In questa percezione del suono consiste l'effetto Doppler. E' bene precisare però che il fenomeno si manifesta con caratteristiche diverse a seconda dei casi. Infatti si possono verificare i seguenti:

1) l'osservatore è fermo nel mezzo di propagazione delle onde e la sorgente sonora gli si avvicina;
2) l'osservatore è fermo (nel mezzo) e la sorgente sonora si allontana da lui;
3) la sorgente è ferma (nel mezzo) e l'osservatore si avvicina alla sorgente;
4) la sorgente è ferma (nel mezzo) e l'osservatore si allontana dalla sorgente;
5) la sorgente e l'osservatore si muovono nel mezzo ed osservatore e sorgente si dirigono l'uno verso l'altro;
6) la sorgente e l'osservatore si muovono nel mezzo e si allontanano reciprocamente muovendosi in versi opposti;
7) la sorgente e l'osservatore si muovono nel mezzo nello stesso verso con l'osservatore che segue la sorgente ;
8) la sorgente e l'osservatore si muovono nel mezzo nello stesso verso con l'osservatore che precede la sorgente.

Analizziamo il diversi casi

1) L'osservatore è fermo nel mezzo di propagazione delle onde e la sorgente sonora gli si avvicina

Illustrazione dell'effetto Doppler nel caso in cui l'osservatore è fermo e la sorgente sonora gli si avvicina con velocità di modulo $\mathbf{V_S}$



Per la descrizione del fenomeno fissiamo un sistema di riferimento di ascisse sulla retta, immaginando, per fissare le idee, che la direzione dell'asse reale di riferimento sia la linea retta ideale congiungente la posizione dell'osservatore O e quella della sorgente sonora (la sirena), con il verso positivo dalla sorgente all'osservatore.
Supponiamo che:

- la sirena emetta un suono di frequenza ν;
- che la sirena si muova verso l'osservatore con velocità di modulo V_S ;
- la velocità di propagazione del suono nel mezzo sia V_{suono}.

Vogliamo determinare la relazione tra la frequenza **ν'** del suono percepito dall'osservatore e la frequenza effettiva ν con cui lo stesso viene emesso dalla sorgente.
Fissiamo l'attenzione su un intervallo di tempo Δt=1s .
All'inizio dell'intervallo di tempo Δt la sirena si trova in un punto P_0, emette il primo impulso sonoro e questo si propaga nel mezzo con velocità propria del mezzo V_{suono}, percorrendo alla fine dell'intervallo di tempo Δt una distanza $\mathbf{d_1}$ pari a $V_{suono} \cdot \Delta t$, quindi $\mathbf{d_1 = V_{suono}}$ metri, giacché Δt=1s .
Al termine dell'intervallo Δt la sorgente emette l'ultimo impulso sonoro, il **ν°- esimo**, ma la sirena ora si trova in una posizione diversa rispetto a quella occupata all'atto dell'emissione del primo impulso; infatti si è avvicinata all'osservatore dello spazio $\mathbf{d_2}$ che la stessa ha coperto in virtù della velocità V_S di cui è dotata rispetto al mezzo. Indichiamo con P_1 la nuova posizione della sirena .

Evidentemente, poiché è trascorso un secondo, per la distanza P_0P_1 risulta $P_0P_1 = d_2 = V_S\, \Delta t = V_S$ metri. Considerato che la sorgente sonora emette suoni con frequenza ν, possiamo affermare che i fronti d'onda emessi che si propagano nel verso sirena → osservatore si trovano nello spazio compreso tra la sfera di centro P_0 e raggio $\mathbf{V_{suono}}$ e la sfera di centro P_1 e raggio nullo. La distanza tra la prima onda e l'ultima è data da $\mathbf{d = V_{suono} - V_S}$. Possiamo a questo punto scrivere la misura della lunghezza d'onda λ' che ne risulta: questa è data dal rapporto tra lo spazio **d** ed il numero di onde emesse dalla sorgente, quindi:

$$\lambda' = \frac{d}{\nu} = \frac{V_{suono} - V_S}{\nu} = \frac{V_{suono}}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{V_S}{V_{suono}}\right) \qquad (1)$$

Ricordiamo ora che la **lunghezza d'onda λ** del segnale sonoro emesso **quando la sorgente è ferma** è data dal rapporto tra la distanza percorsa dalla prima onda in un secondo ed il numero complessivo delle onde emesse nello stesso tempo e questo numero è proprio la frequenza; quindi si ha:

$$\lambda = \frac{V_{suono}}{\nu} \qquad (2)$$

La relazione (1) diventa pertanto:

$$\lambda' = \frac{V_{suono}}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{V_S}{V_{suono}}\right) = \lambda \cdot \left(1 - \frac{V_S}{V_{suono}}\right) \qquad (3)$$

Ricaviamo ora la frequenza ν' con cui avverte il suono l'osservatore.
Notiamo che la velocità del suono nel mezzo è indipendente dallo stato di moto della sorgente sonora per cui l'osservatore registrerà una frequenza ν' semplicemente considerando il rapporto tra la velocità del suono e la lunghezza d'onda λ' precedentemente calcolata. Dunque risulta:

$$\nu' = \frac{V_{suono}}{\lambda'} = \frac{V_{suono}}{\lambda \cdot \left(1 - \frac{V_S}{V_{suono}}\right)} = \frac{V_{suono}}{\lambda} \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} - V_S} = \nu \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} - V_S} \qquad (4)$$

La (4) esprime la relazione cercata fra le frequenze. Si nota che la frazione per cui è moltiplicata la frequenza ν è maggiore di uno perché il denominatore è minore del numeratore e dunque **la frequenza del suono percepito dall'osservatore quando la sorgente gli si avvicina è superiore a quella relativa quando quest'ultima è ferma**.

2) L'osservatore è fermo nel mezzo di propagazione delle onde e la sorgente si allontana da lui.

Si può ripetere, quasi con gli stessi termini, la descrizione riportata nel caso precedente, si deve cambiare solo qualcosa. Infatti, ora la sirena in un secondo si allontana dall'osservatore di un tratto V_S , perciò le ν onde sonore emesse in detto intervallo di tempo si trovano distribuite in una distanza pari alla somma della distanza percorsa dalla prima onda sonora, data ancora da V_{suono} , con la distanza di cui si è allontanata la sirena dall'osservatore pari, come detto, a V_S. Si può pertanto determinare nello stesso modo la lunghezza d'onda λ' degli impulsi sonori scrivendo questa volta

$$\lambda' = \frac{d}{\nu} = \frac{V_{suono} + V_S}{\nu} = \frac{V_{suono}}{\nu} \cdot \left(1 + \frac{V_S}{V_{suono}}\right) \qquad (5)$$

Passando alla frequenza del suono percepito abbiamo:

$$\nu' = \frac{V_{suono}}{\lambda'} = \frac{V_{suono}}{\lambda \cdot \left(1 + \frac{V_S}{V_{suono}}\right)} = \frac{V_{suono}}{\lambda} \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} + V_S} = \nu \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} + V_S} \qquad (6)$$

che è il valore richiesto.

3) La sorgente sonora è ferma e l'osservatore le si avvicina con velocità di modulo V_O

In questo caso, considerando sempre l'intervallo di tempo unitario $\Delta t=1s$, notiamo che l'osservatore riceve tutte le onde che la sorgente emette nel suddetto intervallo di tempo , nonché tutte le onde che possono essere contenute nel tratto di spazio V_O coperto. Il numero $\mathbf{n_o}$ di queste onde è espresso da

$$n_o = \frac{V_O}{\lambda} \qquad (7)$$

Pertanto l'osservatore riceve nell'unità di tempo un numero di impulsi sonori pari a:

$$\nu' = \nu + n_o = \nu + \frac{V_O}{\lambda}.$$

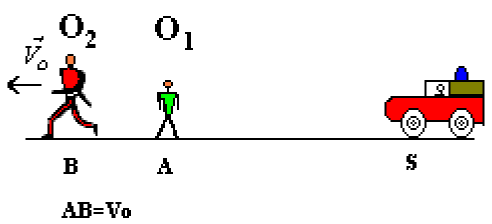
Il valore ottenuto, in virtù della relazione (2) diventa:

$$\nu' = \nu + V_O \cdot \frac{1}{\lambda} = \nu + V_O \cdot \frac{\nu}{V_{suono}} = \nu \cdot \left(1 + \frac{V_O}{V_{suono}}\right) \qquad (8)$$

4) La sorgente sonora è ferma e l'osservatore se n'allontana con velocità in modulo pari a V_O

In questo caso ci rendiamo subito conto che delle ν onde emesse dalla sorgente sonora nell'unità di tempo l'osservatore non riuscirà a ricevere quelle che sono contenute in uno spazio Δs pari a quello che egli ha percorso nello stesso tempo. Questo spazio misura V_O metri . Per dimostrare quest'affermazione si faccia riferimento al disegno riportato a lato. Per fissare le idee, a titolo di esempio, supponiamo di avere due osservatori O_1 , O_2 i quali nell'istante t=0 si trovino nella posizione A , alla distanza AS dalla sorgente, corrispondente allo spazio percorso dalle onde sonore in un intervallo di 4 s (se il mezzo è l'aria risulta $AS \cong 344 ms^{-1} x4\ s = 1376\ m$), con l'osservatore O_1 fermo e l'osservatore O_2 dotato di velocità V_O come indicato in figura. Dopo un secondo l'osservatore O_2 si troverà nella posizione B , con $AB=V_O x1s= V_O\ m$. Ebbene, nel corso dell'intervallo di tempo $\Delta t=1$ s l'osservatore O_1 è stato investito da tutte le onde sonore emesse dalla sorgente S quattro secondi prima , infatti sono necessari 4 s perché gli impulsi sonori arrivino ad O_1. L'osservatore O_2 , che si è allontanato dalla sorgente S del tratto $AB=V_O$ m, nello stesso intervallo di tempo sarà stato raggiunto solo da una parte delle suddette onde sonore, infatti non avrà ancora percepito quelle che sono transitate dalla posizione A ma che sono ancora comprese nel tratto AB , le quali ovviamente sono state già ascoltate dall'osservatore O_1 . Il numero di queste onde, diciamolo $\mathbf{n_o}$ **, è dato dal rapporto tra la distanza AB e la lunghezza d'onda λ propria delle onde nel mezzo.** Indicando come al solito con ν la frequenza del suono emesso dalla sorgente S possiamo affermare che il numero di onde percepite da O_2 è

Effetto Doppler: Sorgente ferma ed osservatore che se n'allontana con velocità $\vec{V}_o$



$$\nu' = \nu - n_o \ , \quad \text{dove} \quad n_o = \frac{V_O}{\lambda}$$

Tenendo presente anche la (2) possiamo allora scrivere

$$\nu' = \nu - n_o = \nu - \frac{V_O}{\lambda} = \nu - \frac{V_O}{\frac{V_{suono}}{\nu}} = \nu \cdot \left(1 - \frac{V_O}{V_{suono}}\right) \qquad (9)$$

che rappresenta la relazione cercata tra le frequenze del suono percepite dai due osservatori.

Come si vede risulta **ν’<ν**, cioè l’osservatore O_2 , in movimento e che si allontana dalla sorgente sonora ferma ,percepisce un suono di frequenza minore, quindi più grave, rispetto a quello percepito dall’osservatore O_1, fermo nella posizione A .

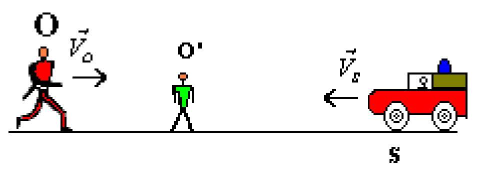
Analizzeremo ora i casi 5-6-7-8 utilizzando le relazioni trovate tra le grandezze in esame (lunghezze d’onda, frequenze) nei quattro casi precedenti. Dimostreremo infatti che ciascuno dei casi che restano da discutere si può considerare come la composizione di due dei primi quattro.

5) La sorgente e l’osservatore si muovono nel mezzo ed osservatore e sorgente si dirigono l’uno verso l’altra

In questo caso scomponiamo il problema in due parti.

- Determiniamo la frequenza ν’ degli impulsi sonori nel tratto di spazio compreso tra la sorgente e l’osservatore .
- Successivamente si determina la frequenza del suono percepito dall’osservatore in movimento.

Effetto Doppler - L’osservatore e la sorgente si avvicinano muovendosi l’uno verso l’altra.



Per quanto riguarda la frequenza del suono emesso , relativamente allo spazio compreso tra la sorgente e l’osservatore possiamo affermare che è data dalla relazione (4) . Infatti, un osservatore fermo nel mezzo di propagazione del suono , rileverebbe il suono proprio con quella frequenza . Indicata con ν’ tale frequenza, dalla (4) si ha:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} - V_S} \qquad (4.1)$$

A questo punto possiamo pensare a cosa ascolterebbe l’osservatore in moto O con velocità in modulo V_O , che si dirige verso il suono che si propaga nello spazio che ha di fronte con frequenza ν’. E’ evidente che egli non sa se la sorgente sonora che ha prodotto il suono è in movimento oppure no. Oggettivamente nello spazio che gli compete si sta propagando un messaggio sonoro con frequenza ν’ ed egli lo riceverà con una frequenza diversa in virtù del suo moto rispetto al mezzo elastico, sede degli impulsi sonori. Il caso dell’osservatore O è identico a quello trattato nel precedente punto 3) . Infatti possiamo sempre supporre che il suono di frequenza ν’ sia stato prodotto da una sorgente che risulta ferma nel mezzo elastico. Pertanto, la frequenza ν’’ con cui l’osservatore percepirà il suono la si ottiene applicando la relazione (8). Quindi si ha:

$$\nu'' = \nu' \cdot \left(1 + \frac{V_O}{V_{suono}}\right) = \nu \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} - V_S} \cdot \left(1 + \frac{V_O}{V_{suono}}\right) = \nu \cdot \frac{V_{suono} + V_O}{V_{suono} - V_S} \qquad (10)$$

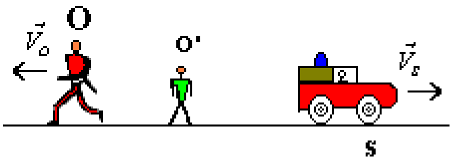
La (10) esprime quindi la frequenza con cui l’osservatore O ascolterà il suono emesso dalla sorgente nel caso in esame.

6) La sorgente e l’osservatore si muovono nel mezzo e si allontanano reciprocamente muovendosi in versi opposti;

Anche in questo caso risolviamo il problema riducendolo a due problemi più semplici. Precisamente

- determiniamo prima la frequenza ν' del suono percepito da un osservatore fermo nel mezzo elastico nel quale si muove la sorgente con velocità $\vec{V}_S$ che emette un suono di frequenza ν;
- quindi si determina la frequenza ν'' con cui l'osservatore O in movimento con velocità $\vec{V}_O$ percepisce il suono di frequenza ν' che si propaga nello spazio in cui egli si muove.

Effetto Doppler – La sorgente sonora e l'osservatore si allontanano procedendo in versi opposti.



Immaginiamo ancora che nello spazio fisico compreso tra l'osservatore O e la sorgente onora S vi sia un altro osservatore O′ fermo rispetto al mezzo elastico. Detta ν la frequenza del suono emesso dalla sorgente, poiché questa si sta muovendo nel mezzo elastico allontanandosi da O', questi, nello posizione in cui si trova, rileva il messaggio sonoro con una frequenza ν' il cui valore è espresso dalla relazione (6) (Caso n.2: osservatore fermo e sorgente che se ne allontana). Quindi risulta:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} + V_S} \qquad (6.1)$$

Consideriamo ora l'osservatore O . Poiché nello spazio che si trova alle sue spalle si sta propagando un messaggio sonoro con frequenza ν' ed egli si sta allontanando da quella zona sarà investito da un suono che avrà frequenza ν'' il cui valore si ricava dalla relazione (9) (caso n.4: sorgente ferma ed osservatore in moto) , sostituendo ν con ν' . Dunque si ha:

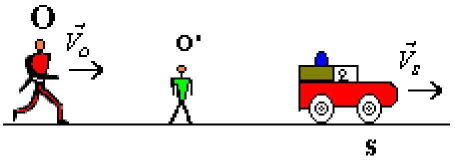
$$\nu'' = \nu' \cdot \left(1 - \frac{V_O}{V_{suono}}\right) = \nu \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} + V_S} \cdot \left(1 - \frac{V_O}{V_{suono}}\right) = \nu \cdot \frac{V_{suono} - V_O}{V_{suono} + V_S} \qquad (11)$$

La (11) esprime la relazione cercata tra la frequenza del suono emesso dalla sorgente e quella del suono percepito dall'osservatore O nel caso in esame.

7) la sorgente e l'osservatore si muovono nel mezzo nello stesso verso con l'osservatore che segue la sorgente ;

Supponiamo dunque che l'osservatore O si muova con velocità $\vec{V}_O$ nello stesso verso in cui si muove la sorgente sonora con velocità $\vec{V}_S$ e che la sorgente preceda l'osservatore . Immaginiamo che nello spazio tra la sorgente e l'osservatore O vi sia un altro osservatore O' fermo rispetto allo spazio sede del fenomeno. Nell'ipotesi che la sorgente sonora emetta un segnale di frequenza **ν** vogliamo determinare la frequenza **ν''** con cui l'osservatore O percepisce il suono.

Effetto Doppler- Osservatore e sorgente sono in movimento rispetto al mezzo elastico



L'osservatore O' si trova nella situazione trattata nel caso 2) , quindi egli percepirà il suono emesso dalla sorgente sonora con frequenza **ν'** il cui valore è espresso dalla relazione (6) , lo spazio fisico interposto tra la sorgente sonora e l'osservatore O è sede di un fenomeno sonoro che si propaga con la velocità propria del mezzo $\vec{V}_{suono}$ dalla sorgente sonora all'osservatore O con frequenza data dalla (6.1) scritta prima. D'altra parte l'osservatore O è in moto rispetto alla spazio fisico sede degli impulsi sonori di frequenza **ν'** , avvicinandosi agli stessi con velocità $\vec{V}_O$ per cui percepirà il suono con frequenza **ν''** il cui valore si ricava applicando la relazione (8), giacché egli rispetto al suono di frequenza **ν'** si trova nella stessa situazione analizzata nel precedente caso 3) (sorgente sonora ferma ed osservatore che si avvicina alla stessa). Possiamo perciò scrivere :

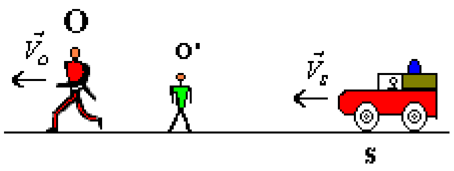
$$\nu'' = \nu' \cdot \left(1 + \frac{V_O}{V_{suono}}\right) = \nu \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} + V_S} \cdot \left(1 + \frac{V_O}{V_{suono}}\right) = \nu \cdot \frac{V_{suono} + V_O}{V_{suono} + V_S} \qquad (12)$$

La (12) esprime la relazione tra la frequenza ν del suono emesso dalla sorgente sonora e la frequenza ν'' del suono percepito dall'osservatore nel caso considerato.

8) **La sorgente e l'osservatore si muovono nel mezzo nello stesso verso con l'osservatore che precede la sorgente.**

Anche in questo caso immaginiamo che tra la sorgente sonora S che si muove nel mezzo elastico con velocità $\vec{V}_S$ e l'osservatore O che procede con velocità $\vec{V}_O$, come indicato in figura, ci sia un secondo osservatore O' fermo rispetto al mezzo. Determineremo ancora la frequenza ν' con la quale O' percepisce il segnale sonoro proveniente da S ; successivamente, considerato che nello spazio fisico che si trova alle spalle dell'osservatore O si sta propagando un suono con frequenza ν' e che egli si sta muovendo rispetto a tale spazio ricaveremo la frequenza ν'' con cui percepirà il suddetto suono. Si faccia riferimento alla figura al lato.

Effetto Doppler – L'osservatore e la sorgente si muovono rispetto al mezzo, procedono nello stesso verso e l'osservatore precede la sorgente sonora.



Per quanto riguarda la frequenza ν' con cui l'osservatore O' percepisce il suono di frequenza ν emesso dalla sorgente S facciamo notare che egli è nella stessa situazione analizzata nel precedente caso n. 1 (osservatore fermo e sorgente che gli si avvicina) . Pertanto il valore di ν' è espresso dalla relazione (4.1). Per quanto concerne la frequenza ν'' con cui l'osservatore O percepisce il suono di frequenza ν' che si sta propagando alle sue spalle notiamo che egli rispetto a detto suono si trova nella stessa situazione esaminata nel precedente caso n. 4 (sorgente ferma ed osservatore che se ne allontana). La frequenza ν'' del suono percepito si ricava dunque applicando la relazione (9) , sostituendo ν con ν'. Possiamo allora scrivere:

$$\nu'' = \nu' \cdot \left(1 - \frac{V_O}{V_{suono}}\right) = \nu \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} - V_S} \cdot \left(1 - \frac{V_O}{V_{suono}}\right) = \nu \cdot \frac{V_{suono} - V_O}{V_{suono} - V_S} \qquad (13)$$

La (13) esprime la relazione tra la frequenza del suono emesso dalla sorgente e quella del suono percepito dall'osservatore nel caso esaminato.

Esercizio proposto

Si consideri una sorgente sonora che emette un segnale con frequenza ν .Premesso che se la sorgente sonora è ferma e l'osservatore si avvicina alla stessa con velocità di modulo $\mathbf{V_O}$ la frequenza del suono percepito dall'osservatore è espressa dalla relazione

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 + \frac{V_O}{V_{suono}}\right)$$

mentre se l’osservatore è fermo e la sorgente gli si avvicina con velocità di modulo $\mathbf{V_S}$ allora la frequenza ν’ del suono percepito è espressa da:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{V_{suono}}{V_{suono} - V_S} \quad ,$$

stabilire quale relazione deve sussistere tra le velocità $\mathbf{V_S}$ e $\mathbf{V_O}$ in modo che nei due casi l’osservatore percepisca il suono con la stessa frequenza.

$$\left[V_O = \frac{V_{suono} \cdot V_S}{V_{suono} - V_S} \right]$$