Sul Campo Elettrostatico

creato da un filo rettilineo di lunghezza finita o infinitamente esteso

Problema

1) Determinare il campo elettrico determinato dalla distribuzione omogenea di carica, di densità lineare λ, su un filo rettilineo di lunghezza L nei punti appartenenti al piano perpendicolare al filo nel suo punto medio.

2) Fornire il tipo di campo elettrico che si determina nei punti del suddetto piano a distanza r>>L.

3) Stabilire come cambia il campo elettrico nell'ipotesi che il filo rettilineo diventi infinitamente esteso.

Elaborazioni

1) Facciamo riferimento alla Figura 1 nella quale abbiamo rappresentato:

1. il riferimento cartesiano ortogonale di assi **i** (asse x), **j** (asse y), **k** (asse z), con origine nel punto O;
2. il filo rettilineo carico con il segmento AA' giacente sull'asse z ed avente il suo punto medio coincidente con O;
3. il piano α perpendicolare in O alla retta ideale sulla quale giace il filo AA';quindi il piano coincide con il piano coordinato Oxy del riferimento cartesiano;
4. un punto qualsiasi P del piano α a distanza r da O, nel quale vogliamo determinare il campo elettrico **E** creato dalla distribuzione lineare di carica;
5. la circonferenza formata dai punti del piano α avente centro in O e raggio r=OP.

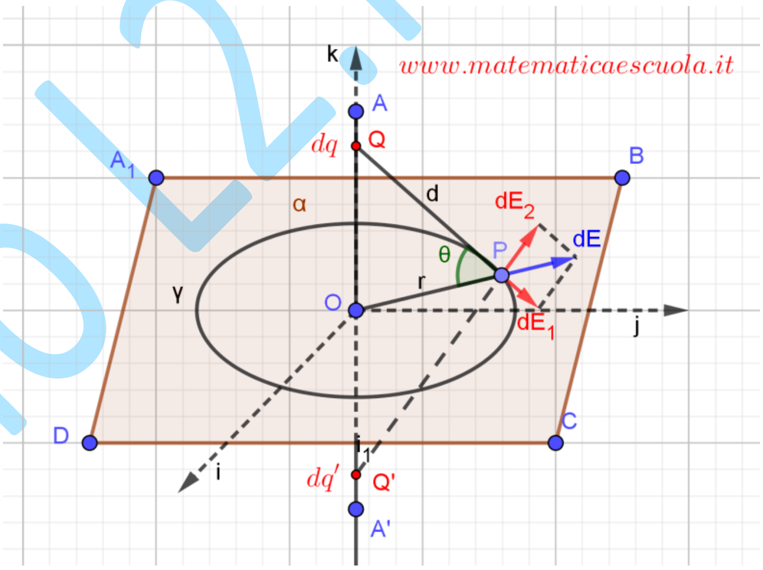

Figura 1

Supponiamo che il filo AA' sia caricato uniformemente con carica positiva e sia λ la distribuzione lineare di carica; quindi la carica complessiva giacente sul filo vale $\lambda \cdot L$.

Consideriamo sulla metà OA del filo l'elemento di filo centrato nel punto Q alla quota z, in cui è racchiusa la **carica infinitesima** $dq=\lambda \cdot dz$, che possiamo ritenere **puntiforme** e nella metà OA' del filo l'elemento di filo centrato nel punto Q', simmetrico di Q rispetto al centro O, nel quale sarà racchiusa la carica dq'= dq.

Le distanze dei due elementi di filo considerati dal punto P del piano α sono uguali; indichiamo con $\boldsymbol{d}$ la misura di questa distanza.

Osserviamo che il campo elettrico generato dalla carica dq in P, che indichiamo con $\overrightarrow{dE_1}$, ha la direzione e il verso del vettore $\overrightarrow{QP}$ ed intensità

$$dE_1 = k \cdot \frac{dq}{d^2} = k \cdot \frac{\lambda dz}{d^2} \qquad (1)$$

nella quale la costante k è la costante di Coulomb (che figura nella legge di Coulomb) $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Dal triangolo rettangolo QOP, rettangolo in O, con $\overline{OQ} = z$,

$$d^2 = \overline{QP}^2 = z^2 + r^2 \qquad (2)$$

Utilizziamo l'ampiezza dell'angolo acuto θ che rappresenta l'inclinazione del segmento QP sul piano α. Sussistono le uguaglianze

$$z = \overline{OQ} = \overline{OP} \cdot tan(\theta) = r \cdot tan(\theta) \qquad (3)$$

e perciò per il differenziale dz risulta

$$dz = r \cdot \frac{1}{cos^2(\theta)} d\theta \qquad (4)$$

L'intensità dE_1 assume la forma seguente

$$dE_1 = k \cdot \frac{\lambda r}{d^2 cos^2(\theta)} d\theta \qquad (1.1)$$

Sviluppando analoghe considerazioni si riconosce che anche la carica positiva dq' centrata in Q' determina nel punto P il campo elettrico $\overrightarrow{dE_1}'$, indicato in Figura 1 con dE_2, che ha la stessa intensità di $\overrightarrow{dE_1}$.

Osserviamo che questi due vettori sono inclinati sul piano α dello stesso angolo θ ed hanno su α la stessa proiezione ortogonale, mentre le loro proiezioni ortogonali sull'asse z sono opposte. Ciò implica che la risultante della loro somma $\overrightarrow{dE_1} + \overrightarrow{dE_1}'$ ha componente nulla lungo l'asse z , mentre la componente sul piano α è il vettore $\overrightarrow{dE}$ il cui modulo vale il doppio del modulo della proiezione ortogonale di $\overrightarrow{dE_1}$ su detto piano.

Poiché risulta

$$\left|\overrightarrow{dE_1}\right|_\alpha = dE_1 \cdot \cos(\theta) = k \cdot \frac{\lambda r}{d^2 cos^2(\theta)} d\theta \cdot \cos(\theta) = k \cdot \frac{\lambda r}{d^2 cos(\theta)} d\theta \qquad (1.1.1)$$

deduciamo l'uguaglianza

$$\left|\overrightarrow{dE}\right| = dE = 2k \cdot \frac{\lambda r}{d^2 cos(\theta)} d\theta \qquad (5)$$

Calcolo dell'intensità del campo elettrico totale in P

Il valore del campo elettrico totale **E** creato in P, adottando l'ipotesi della distribuzione continua di carica sul filo, si ottiene sommando i contributi alla creazione del campo dovuto a tutta la carica distribuita sul filo e ciò si realizza calcolando il seguente integrale definito

$$E_P = \int_{\theta=0}^{\theta_{max}} dE \quad = \int_{\theta=0}^{\theta_{max}} \frac{2k\lambda r}{d^2 cos(\theta)} d\theta \tag{6}$$

Osserviamo che tra d ed r sussiste la relazione

$$r = d \cdot \cos(\theta) \rightarrow d = \frac{r}{\cos(\theta)} \tag{7}$$

e che inoltre

$$\frac{L}{2} = r \cdot tan(\theta_{max}) \rightarrow L = 2r \cdot tan(\theta_{max}) \tag{8}$$

Sostituiamo la (7) nella funzione integranda ed eseguiamo l'integrale definito. Si ha:

$$E_P = \int_{\theta=0}^{\theta_{max}} \frac{2k\lambda r}{d^2 cos(\theta)} d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta_{max}} \frac{2k\lambda r \cdot cos^2(\theta)}{r^2 cos(\theta)} d\theta = \frac{2k\lambda}{r} \int_{\theta=0}^{\theta_{max}} cos(\theta) d\theta = \frac{2k\lambda}{r} \left[sen(\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta_{max}} = \frac{2k\lambda}{r} sen(\theta_{max})$$

Possiamo utilizzare la nota relazione goniometrica $sen(\theta) = \frac{tan(\theta)}{\sqrt{1+tan^2(\theta)}}$ valida per gli angoli acuti e poiché θ_{max} è acuto possiamo scrivere l'espressione del campo elettrico in P nella forma seguente

$$E_P = \frac{2k\lambda}{r} sen(\theta_{max}) = \frac{2k\lambda}{r} \cdot \frac{tan(\theta_{max})}{\sqrt{1+tan^2(\theta_{max})}} \tag{6.1}$$

Utilizziamo ora l'uguaglianza (8). Otteniamo

$$E_P = \frac{2k\lambda}{r} \cdot \frac{\frac{L}{2r}}{\sqrt{1+\frac{L^2}{4r^2}}} = \frac{2k\lambda}{r} \cdot \frac{L}{2r} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2r} \cdot \sqrt{4r^2+L^2}} = \frac{2k\lambda \cdot L}{r\sqrt{4r^2+L^2}} \tag{6.2}$$

La (6.2) esprime l'intensità del campo elettrico nei punti P del piano α a distanza r dal punto medio del filo in funzione della densità lineare di carica e della lunghezza L del filo.

2) Nei punti del piano α molto lontani dal fino il campo elettrico avrà l'andamento come quello creato da una carica puntiforme, precisamente sarà quello dovuto alla carica totale $Q=\lambda \cdot L$, che sarà vista come puntiforme, quindi sarà del tipo $k \cdot Q/r^2$. Questo risultato si può ottenere dalla forma algebrica ricavata (6.2) con le seguenti elaborazioni.

$$E_P = \frac{2k\lambda \cdot L}{r\sqrt{4r^2+L^2}} = \frac{2k\lambda \cdot L}{r\sqrt{r^2\left(4+\frac{L^2}{r^2}\right)}} = \frac{2k\lambda \cdot L}{r^2\sqrt{4+\left(\frac{L}{r}\right)^2}}$$, se r>>L, si può porre L/r~0 e quindi

$$E_P \simeq \frac{2k\lambda \cdot L}{r^2\sqrt{4+0}} = \frac{\cancel{2}k\lambda \cdot L}{r^2 \cdot \cancel{2}} = \frac{k\lambda \cdot L}{r^2}$$

ed infine, tenendo conto che la carica totale sul filo è $Q_{tot}=\lambda \cdot L$, scrivere

$$E_P \simeq \frac{kQ_{tot}}{r^2} \qquad (6.2.1)$$

3) Se si considera il filo rettilineo molto lungo[1] allora l'intensità del campo elettrico in un punto P a distanza r dal filo dipenderà solo dalla densità lineare di carica e dalla distanza r del punto dal filo. L'acquisizione del risultato si ottiene studiando il limite dell'espressione del campo elettrico per $L \to +\infty$. Si ha:

$$E_P = \lim_{L\to+\infty} \frac{2k\lambda \cdot L}{r\sqrt{4r^2+L^2}} = \lim_{L\to+\infty} \frac{2k\lambda \cdot \cancel{L}}{r\cancel{L}\sqrt{\frac{4r^2}{L^2}+1}} = \lim_{L\to+\infty} \frac{2k\lambda}{r\sqrt{\frac{4r^2}{L^2}+1}} = \frac{2k\lambda}{r\sqrt{\frac{4r^2}{+\infty}+1}} = k \cdot \frac{2\lambda}{r}$$

Si può avere una forma diversa introducendo la costante dielettrica del vuoto. Si ha:

$$E_P = k \cdot \frac{2\lambda}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\lambda}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (6.2.2)$$

(1) Spesso ci si esprime con la locuzione " il filo è di lunghezza infinita", cosa non possibile realisticamente.