Chiarimento sulla derivata della funzione inversa[1]

Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 6$$

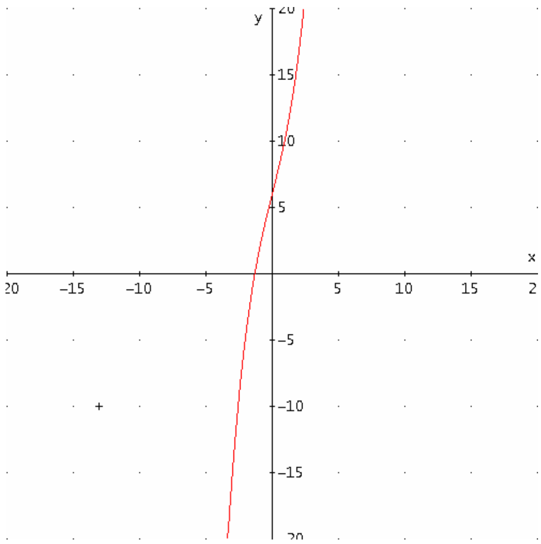
dimostrare che è invertibile e calcolare la derivata prima della funzione inversa nel punto y=6.

Soluzione

Osserviamo che risulta $f(0) = 6$.

Ricordiamo che se una funzione y=*f*(*x*) è invertibile nel suo dominio ed è derivabile, ed $y_0 = f(x_0)$ è un punto del codominio, qualora risulti $f'(x_0) \neq 0$, è possibile calcolare la derivata prima della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ nel punto y_0 e risulta

$$D\left(f^{-1}(y)\right)_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$



Questa proprietà è applicabile anche se la funzione è solo invertibile in un intono completo del punto x_0. In tal caso si farà riferimento alla restrizione della funzione al sottoinsieme costituito dall'intorno di detto punto.
La funzione in esame è definita su tutto l'asse reale, è derivabile e si riscontra che è strettamente crescente perché la derivata prima è strettamente positiva.
Ovviamente non è semplice trovare l'espressione analitica della funzione inversa. L'utilità del teorema sulla derivata di una funzione inversa risiede proprio nella possibilità di calcolare la derivata prima della funzione inversa in un punto del suo dominio sebbene della stessa non si conosca l'esplicitazione.
La funzione derivata prima è

$f'(x) = x^2 + 4 > 0$, per ogni x reale.

Per quanto sopra, con $x_0 = 0, y_0 = 6$, essendo $f'(0) = 4$, si ha

$$D\left(f^{-1}(y)\right)_{y=6} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}$$

[1] Risposta ad un quesito richiesto dall'utente Marco M., studente di Economia.