

Chiarimenti sui fasci di rette

Quesito da un utente del sito¹

Egregio Professore,

.....

Vorrei cortesemente:

1- una definizione di retta generatrice di un fascio di rette.

2-perchè è necessario conoscere l'equazione di esse per identificare un fascio proprio?

3-Se ho un'equazione parametrica di primo grado in x e in y, una volta esplicitata rispetto a y, non mi è sufficiente controllare che "m"(-a/b) sia dipendente dal parametro per poter dire che si tratta di un fascio proprio? e che se il parametro figura solo a termine noto si tratta di un fascio improprio? ovviamente non ho capito che cosa sono le generatrici.

4-nell'esercizio da lei proposto e risolto del 29/12/06 al paragrafo a) leggo che la "g1" ($x+2y-1=0$) è la retta limite, perchè proprio la g1? e cos'è la retta limite?

La ringrazio sentitamente, sono un appassionato autodidatta della matematica, saluti Giovanni Lopresti

Risposte veloci

1) Quando si hanno le equazioni cartesiane di due rette $r: ax+by+c=0$, $s: a'x+b'y+c'=0$, indipendentemente da come sono (incidenti o parallele), si chiama fascio di rette da esse individuato l'insieme delle rette la cui equazione è la combinazione lineare delle equazioni delle due rette date. Quindi

$F: \lambda(ax+by+c) + \mu(a'x+b'y+c') = 0$, al variare dei parametri λ, μ nel campo dei numeri reali: \mathbb{R} , con la condizione che i due parametri non si annullino contemporaneamente.

Le due rette r, s sono dette le generatrici del fascio.

1.1) Se le due rette r, s sono incidenti e C è il loro punto comune, allora ogni retta del fascio passa da C ; questo punto rappresenta il centro del fascio ed il fascio si dice proprio.

1.2) Analogamente, se le due rette r, s sono parallele, allora ogni retta la cui equazione si ottenga assegnando ai due parametri λ, μ nei valori ammissibili sarà ancora una retta parallela alle rette di partenza. Il fascio è detto improprio.

1.3) Spesso capita che sia fornita l'equazione di un **fascio di rette con la presenza di un solo parametro**. In questo caso, indipendentemente dal tipo di fascio, proprio o improprio, al variare del parametro si ottengono rette del fascio. Ebbene, se si tratta di un fascio proprio di centro C allora il fascio è costituito, per definizione, da tutte le rette del piano passanti per C , così, se si tratta di un fascio di rette parallele, al variare del parametro si ottengono sempre rette parallele. Tuttavia, si verifica immediatamente che ne esiste una la cui equazione non è ottenibile per alcun valore del parametro ma a questa retta tende la generica retta del fascio che si ottiene assegnando al parametro valori che tendono verso $+\infty$, o verso $-\infty$ e per questo motivo detta retta è denominata **retta limite** o anche **retta esclusa**.

2. Come si ottengono le rette generatrici di un fascio?

2.1) Quando si conosce l'equazione di un fascio di rette contenente un solo parametro, per individuare le equazioni delle due generatrici si separano i termini che contengono il parametro da quelli che non lo contengono, quindi si mette in evidenza il parametro. Le equazioni delle due rette generatrici si ottengono uguagliando separatamente a zero il coefficiente del parametro (e si ha la retta limite), ed il gruppo dei termini che non contengono il parametro.

¹ Giovanni Lopresti, autodidatta della matematica

Esempio. Dato il fascio di equazione $2x+(3k+1)y -2k+1=0$, lo si scrive nella seguente forma: $(2x+y+1)+k(3y-2)=0$. Ebbene, le due rette generatrici sono le rette

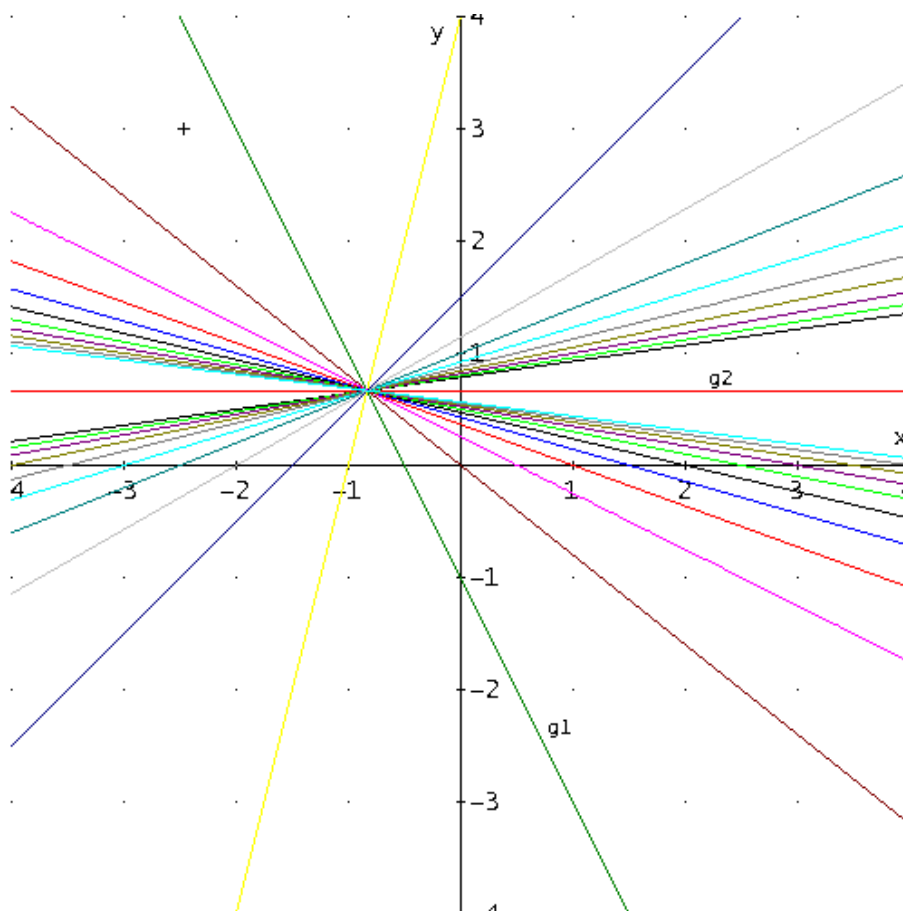
$$g_1:2x+y+1=0, g_2:3y-2=0$$

- Notiamo che:
le due rette sono incidenti, quindi il fascio è proprio ed il centro è il punto $C(-5/6;2/3)$;
- La retta generatrice g_1 si ottiene ponendo $k=0$, mentre la retta g_2 non si può ottenere per alcun valore del parametro, ma essa fa parte del fascio e rappresenta proprio la retta limite. Chiariamo il concetto.
- Visto che tutte le rette del fascio diverse dalla retta g_1 si possono ottenere assegnando a k valori diversi da zero, possiamo scrivere l'equazione dell'insieme di tutte queste rette del fascio nella seguente forma

$$\frac{1}{k}(2x+y+1)+(3y-2)=0$$

dalla quale si evince che assegnando a k valori che tendono verso $+\infty$, o verso $-\infty$ si ottengono rette che ruotando intorno al punto C tendono ad avvicinarsi alla retta g_2 .

- Nella figura che segue ho rappresentato 22 rette del fascio, precisamente quelle che si ottengono assegnando a k i valori $-5; -4,5; -4; \dots; 0; 0,5; \dots; 4; 4,5; 5$, che sono 21 (e tra queste vi è la generatrice g_1 e la retta generatrice g_2 , retta limite, indicata in colore rosso. .



3. Quando si ha un'equazione di primo grado in due variabili contenente un parametro, ad essa corrisponde nel piano cartesiano un fascio di rette solo se il parametro figura con esponente uno; se non è soddisfatta questa condizione l'equazione rappresenterà un insieme di rette ma non un fascio. Ad esempio, l'equazione $(k^2+1)x+2y-1=0$ rappresenta un insieme di rette che passano tutte dal punto $C(0;1/2)$ ma non rappresenta tutte le rette che passano per C . Infatti, si nota che tutte le rette le cui equazioni si ottengono dall'equazione data hanno coefficiente angolare m negativo, precisamente risulta $m \leq -\frac{1}{2}$.

Ciò premesso, quando si ha l'equazione di un fascio di rette, per riconoscere se è proprio o improprio effettivamente è sufficiente controllare che il rapporto $m=-a/b$ vari al variare del parametro, oppure si mantenga costante. Nel primo caso il fascio è proprio, nel secondo caso è improprio.

Evidentemente se il parametro è presente solo nel termine noto, il rapporto $-a/b$ risulta costante e quindi il fascio è improprio.