Solidi di rotazione

Calcolo del volume tramite l'integrale definito

Problema

1. La funzione $f(x)=1-xe^{-x}$, di cui in Figura 1 è riportato parzialmente il grafico, ha in F(2;*f*(2)) un punto di flesso ed è positiva in tutto il dominio di definizione, che è R.
2. Calcolare il volume V_1 del solido V' di rotazione descritto dal sottografico della funzione relativo all'intervallo [0;2] in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.
3. Calcolare il volume V_2 del solido V'' di rotazione descritto dal sottografico della funzione relativo all'intervallo [0;2] in una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate.
4. Determinare il rapporto r tra i volumi V_1 e V_2 esprimendolo anche in formato percentuale.

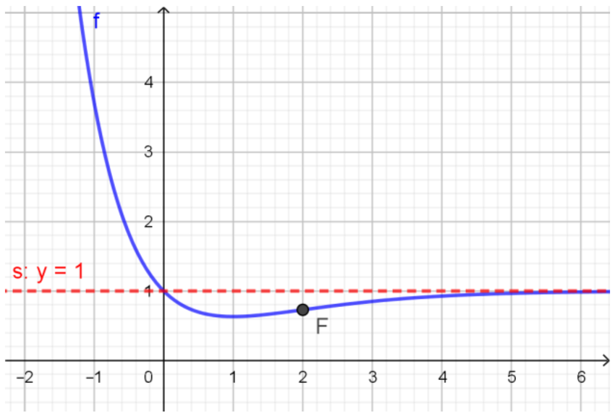

Figura 1

Elaborazioni

2. Il volume del solido di rotazione V' è dato dal valore del seguente integrale definito:

$$V_1=\int_0^2 \pi\left[f(x)\right]^2 dx=\pi\int_0^2\left(1-xe^{-x}\right)^2 dx=\pi\int_0^2\left(1-2xe^{-x}+x^2e^{-2x}\right)dx=\pi\left[x\right]_0^2-2\pi\int_0^2 xe^{-x}dx+\pi\int_0^2 x^2e^{-2x}dx=$$

i due integrali residui vanno calcolati per parti, in particolare per il primo è sufficiente applicare il metodo di integrazione per parti una volta, per il secondo due volte, considerando il fattore esponenziale come fattore differenziale. Eseguiamo separatamente i due integrali indefiniti.

$$I_1=\int xe^{-x}dx=\int x\cdot D\left(-e^{-x}\right)dx=$$
$$-xe^{-x}-\int 1\cdot\left(-e^{-x}\right)dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=$$
$$-xe^{-x}-e^{-x}+C_1=-e^{-x}\left(x+1\right)+C_1$$

$$I_2=\int x^2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int x^2\left(-2e^{-2x}\right)dx=$$
$$-\frac{1}{2}\left[x^2e^{-2x}-\int 2xe^{-2x}dx\right]=$$

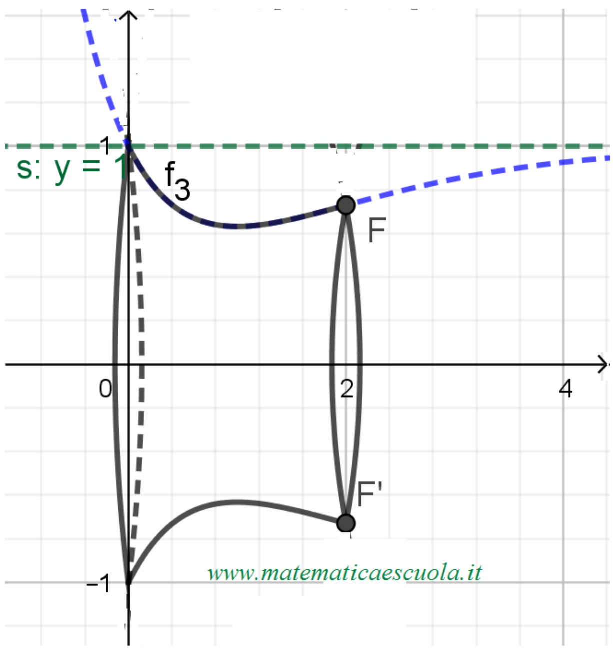

Figura 2

$$-\frac{1}{2}\left[x^2e^{-2x}+\int x\left(-2e^{-2x}\right)dx\right]=-\frac{1}{2}\left[x^2e^{-2x}+\int x\cdot D\left(e^{-2x}\right)dx\right]=-\frac{1}{2}\left[x^2e^{-2x}+xe^{-2x}-\int 1\cdot e^{-2x}dx\right]=$$
$$-\frac{1}{2}\left[x^2e^{-2x}+xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int 1\cdot\left(-2e^{-2x}\right)dx\right]=-\frac{1}{2}\left[x^2e^{-2x}+xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right]+C_2$$

Riprendiamo ora il calcolo dell'integrale definito senza riportare le due costanti additive C_1, C_2 che figurano nei due integrali indefiniti. Si ha:

$$V_1=\pi\left[x\right]_0^2-2\pi\cdot\left[-e^{-x}\left(x+1\right)\right]_0^2-\frac{1}{2}\pi\left[x^2e^{-2x}+xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^2=2\pi-2\pi\cdot\left[-3e^{-2}+1\right]+$$
$$-\frac{1}{2}\pi\left[\left(4e^{-4}+2e^{-4}+\frac{1}{2}e^{-4}\right)-\frac{1}{2}\right]=\cancel{2\pi}+2\pi\cdot 3e^{-2}-\cancel{2\pi}-\frac{1}{2}\pi\cdot 6e^{-4}-\frac{1}{4}\pi e^{-4}+\frac{1}{4}\pi=$$
$$2\pi\cdot 3e^{-2}-3\pi e^{-4}-\frac{1}{4}\pi e^{-4}+\frac{1}{4}\pi=\pi\left(6e^{-2}-\frac{13}{4}e^{-4}+\frac{1}{4}\right)$$

3. Il valore del volume del solido di rotazione V'' è dato dal seguente integrale definito:

$$V_2=\int_0^2 2\pi x\cdot f\left(x\right)dx=\int_0^2 2\pi x\cdot\left(1-xe^{-x}\right)dx=2\pi\int_0^2\left(x-x^2e^{-x}\right)dx=2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2-2\pi\int_0^2 x^2e^{-x}dx=$$
$$4\pi+2\pi\cdot\int_0^2 x^2D\left(e^{-x}\right)dx=4\pi+2\pi\cdot\left(\left[x^2e^{-x}\right]_0^2-\int_0^2 2x\cdot e^{-x}dx\right)=4\pi+2\pi\cdot 4e^{-2}+4\pi\int_0^2 x\cdot D\left(e^{-x}\right)dx=$$
$$4\pi+8\pi e^{-2}+4\pi\left(\left[xe^{-x}\right]_0^2-\int_0^2 1\cdot e^{-x}dx\right)=4\pi+8\pi e^{-2}+8\pi e^{-2}+4\pi\cdot\left[e^{-x}\right]_0^2=4\pi+16\pi e^{-2}+$$
$$4\pi\left(e^{-2}-1\right)=20\pi e^{-2}$$

4. Rapporto dei volumi dei due solidi di rotazione:

$$r=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi\left(6e^{-2}-\frac{13}{4}e^{-4}+\frac{1}{4}\right)}{20\pi e^{-2}}=\frac{24e^{-2}-13e^{-4}+1}{80e^{-2}}=\frac{24-13e^{-2}+e^{2}}{80}\simeq 0{,}37037=37{,}037\%$$