Studio di una funzione esponenziale mista.

Calcolo dell'area di una regione piana finita e di una illimitata

Problema

1. Considerata la funzione $f(x)=1-xe^{-x}$, dopo aver determinato il dominio di definizione, studiato il segno e gli zeri, i limiti agli estremi del dominio, determinati gli eventuali asintoti, la monotonia e gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi o assoluti, l'Inf(f) ed il Sup(f), la concavità e la convessità e gli eventuali punti di flesso, se ne tracci il grafico.
2. Riconosciuto che il grafico della funzione ammette un solo punto di flesso F ed un asintoto orizzontale s, scrivere l'equazione della tangente inflessionale e determinare l'area del triangolo delimitato dall'asintoto, dalla tangente inflessionale e dall'asse delle ordinate.
3. Determinare l'area della regione illimitata definita dall'asintoto, dal grafico della funzione e dalla retta $x=x_F$.

Elaborazioni

1.
   a. Dominio - La funzione è definita su tutto l'asse reale, è continua e dotata di derivata di qualsiasi ordine, pure continua, in ogni punto del suo dominio di definizione.
   b. Segno e zeri - Osserviamo che $f(0)=1$; $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-xe^{-x}=0$; per $x\neq 0$ l'equazione è equivalente alla seguente $\frac{1}{x}=e^{-x}$. Dal confronto dei grafici delle due funzioni $f_1(x)=1/x$, $f_2(x)=e^{-x}$ (Figura 1) si evince che non esistono punti di intersezione, perciò la funzione $y=f(x)$ non ha zeri. Per quanto concerne il suo segno, facciamo notare che la disuguaglianza $1-xe^{-x}>0$, che possiamo scrivere nella forma $xe^{-x}<1$ ha le seguenti proprietà:
      i. per $x<0$ è equivalente alla seguente $e^{-x}>\frac{1}{x}$, senz'altro soddisfatta perché il secondo membro è negativo ed il primo è positivo;
      ii. per $x>0$ è equivalente alla disuguaglianza $e^{-x}<\frac{1}{x}$, anch'essa soddisfatta per ogni x>0.

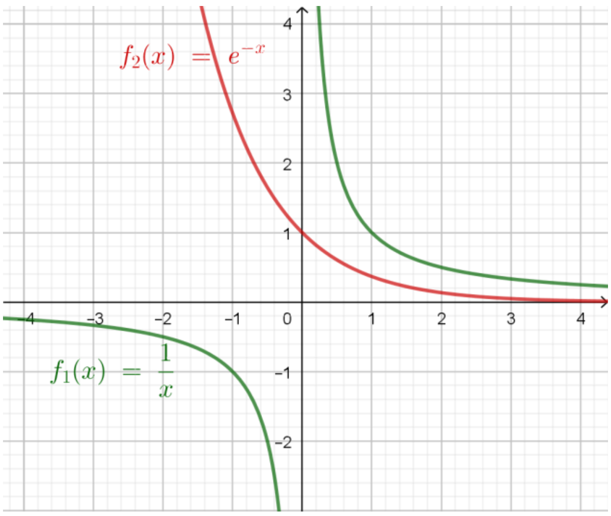

Figura 1

   Si conclude che la funzione $y=f(x)$ è positiva in tutto il dominio di definizione.

   c. Limiti agli estremi del dominio ed asintoti.
      i. $\lim_{x\to-\infty}\left(1-xe^{-x}\right)=1+\infty\cdot e^{+\infty}=+\infty$; non esiste asintoto orizzontale per $x\to-\infty$.

ii. $\lim_{x\to+\infty}\left(1-xe^{-x}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=1-\frac{+\infty}{+\infty}$; il limite che si presenta nella forma indeterminata ∞/∞ si risolve applicando una sola volta la regola di de l'Hôpital: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=\frac{1}{+\infty}=0$. In conclusione $\lim_{x\to+\infty}\left(1-xe^{-x}\right)=1$. Osserviamo che essendo $xe^{-x}>0$ si ha $\lim_{x\to+\infty}\left(1-xe^{-x}\right)=1^{-}$.

iii. Per gli asintoti notiamo che la retta **y=1 è asintoto orizzontale per *x*⟶+∞**, mentre per *x*⟶-∞ non vi sono asintoti orizzontali e neanche obliqui perché risulta $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-xe^{-x}}{x}=$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=0-(+\infty)=-\infty$.

d. Monotonia, eventuali punti di massimo e/o di minimo

i. $f'(x)=0-e^{-x}-xe^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ La funzione è strettamente decrescente per x<1, strettamente crescente per x>1; il punto x=1 è di minimo relativo proprio, nonché di minimo assoluto: $\min=f(1)=1-e^{-1}\simeq 0{,}6321206$.

ii. La funzione non ha punti di massimo relativo, né di massimo assoluto; dal valore del limite studiato in c.i) si deduce che Sup(f)=+∞.

e. Concavità, convessità, punti di flesso.

i. $f''(x)=e^{-x}(x-1)(-1)+e^{-x}=$ $e^{-x}(2-x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$.

ii. La funzione è convessa per x<2, è concava per x>2, il punto x=2 è di flesso discendente: $f(2)=1-2e^{-2}\simeq 0{,}729329$. Il punto di flesso del grafico è F(2;0,73).

f. Il grafico della funzione y=f(x) è riportato in Figura 2.

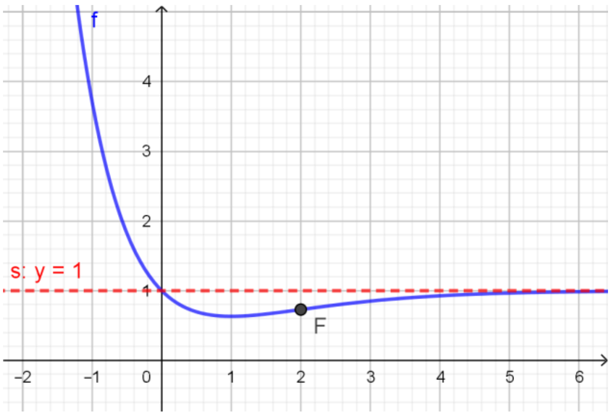

Figura 2

2. Equazione della tangente nel punto di flesso.

a. L'equazione della tangente nel punto di F è $t_F: y-f(2)=f'(2)(x-2)$ $\to t_F: y-0{,}73=e^{-2}(x-2)$

b. Area del triangolo

i. Sia A il punto di intersezione della tangente inflessionale con l'asse y.

ii. $y_A=f(2)+f'(2)(0-2)=$ $1-2e^{-2}+e^{-2}(2-1)(-2)=$ $1-4e^{-2}\simeq 0{,}458659$;A(0;0,46).

iii. Sia B il punto di intersezione dell'asintoto con la tangente inflessionale. Le coordinate di B si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette:y=1; $t_F: y-f(2)=f'(2)(x-2)$ →B(4;1).

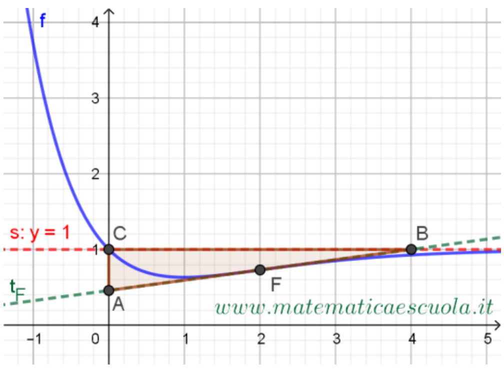

Figura 3-Area(ABC)≈1,08

iv. L'asintoto incontra l'asse y nel punto C(0;1).

v. Il triangolo ABC è rettangolo in C e la sua area è: $Area(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}(y_C - y_A)\cdot(x_B - x_C) = \frac{1}{2}(1-1+4e^{-2})\cdot(4-0) = 8e^{-2} \simeq 1,082682$

3. Per il trovare il valore dell'area richiesta si deve eseguire il calcolo di un integrale improprio, precisamente si deve studiare il seguente integrale $\int_{x=2}^{+\infty}\left[1-\left(1-xe^{-x}\right)\right]dx = \int_{x=2}^{+\infty} xe^{-x}dx$ e quindi procedere allo studio del seguente limite

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{x=2}^{k} xe^{-x}dx$$

L'integrale indefinito corrispondente si affronta applicando il metodo di integrazione per parti. Si ha:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{x=2}^{k} xe^{-x}dx = \lim_{k\to+\infty}\left[-e^{-x}(x+1)\right]_2^k = \lim_{k\to+\infty}\left[-(k+1)e^{-k} + 3e^{-2}\right] = 3e^{-2}$$

Il limite converge, quindi la funzione integranda è integrabile in senso generalizzato e il valore finito trovato $3e^{-2}$ rappresenta l'area della regione illimitata in oggetto.

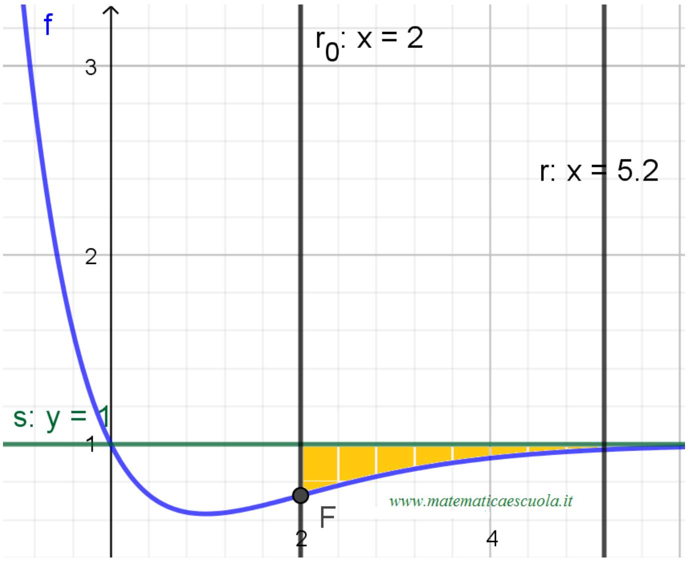

Figura 4- Illustrazione per il calcolo dell'integrale improprio.