Derivabilità, Teorema di Rolle e calcolo integrale

1. Considerata la funzione $f(x)=x\sqrt{x-x^2}$, determinare il suo dominio di definizione e quello di derivabilità.
2. Riconosciuto che nel dominio di definizione la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, determinare il corrispondente punto x_0 previsto dal suddetto teorema.
3. Precisare se la funzione ammette massimo e/o minimo, determinandoli in caso affermativo. Rappresentare il diagramma della funzione a prescindere da altre proprietà.
4. Determinare il volume del solido di rotazione descritto dal trapezoide della funzione relativamente al dominio di definizione in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.

Elaborazioni

1. La funzione è definita per i valori della variabile x che soddisfano la condizione $x-x^2\geq 0$, equivalente a $x^2-x\leq 0$ e questa è soddisfatta nell'intervallo [0;1].

   Per quanto concerne la derivabilità proviamo che la funzione è derivabile in ogni punto del dominio di definizione ad eccezione del punto x=1. Infatti, possiamo scrivere la funzione come segue

   $$f(x)=x\cdot\left(x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=x\cdot x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

   e calcolare la derivata prima applicando la regola della derivata del prodotto di due funzioni. Si ha

   $$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\left[3(1-x)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right]=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3-4x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

   Si osserva che l'espressione ottenuta esiste per ogni punto del dominio della funzione di riferimento con esclusione del punto x=1 dove si annulla il denominatore.

2. La funzione nel dominio di definizione è continua, agli estremi assume lo stesso valore: f(0)=f(1)=0, e per quanto precisato è derivabile in ogni punto interno all'intervallo [0;1]. Sono soddisfatte quindi le tre ipotesi richieste dal Teorema di Rolle. La tesi del Teorema è che internamente all'intervallo [0;1] esiste almeno un punto in cui si annulla la derivata prima. In effetti, dall'espressione della derivata prima si riconosce che questa si annulla nei punti x=0 e x=3/4; il secondo punto indicato è quello previsto dal Teorema.
3. Abbiamo precisato che la funzione è continua nel suo dominio e poiché questo è un intervallo chiuso per il teorema di Weierstrass la funzione è dotata di massimo e di minimo assoluti.

   Osserviamo che la funzione nel suo dominio è non negativa e si annulla, come precisato agli estremi dello stesso; pertanto nei punti estremi x=0, x=1 assume il suo minimo; nel punto in cui si annulla la derivata prima la funzione assume il suo massimo assoluto risultando

   $$Max=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

   Per quanto concerne il diagramma della funzione precisiamo che è tangente all'asse delle ascisse nel punto x=0 perché in detto punto si annulla la derivata prima e nel punto x=1 è tangente alla retta x=1. La seconda caratteristica si deduce dal valore della derivata sinistra nel punto; infatti, studiando il limite del rapporto incrementale sinistro nel punto x=1 si ha:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\sqrt{x-x^2}-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\sqrt{x(1-x)}}{-(1-x)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}{-(1-x)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\sqrt{x}}{-\sqrt{1-x}}=\frac{1}{0^-}=1\cdot(-\infty)=-\infty\,.$$

Evidentemente alla stessa conclusione si giunge studiando il limite laterale sinistro nello stesso punto della funzione derivata prima:

$$\lim_{x\to1^-}f'(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3-4x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{3-4}{0^+}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Il diagramma della funzione è riportato in Figura 1.

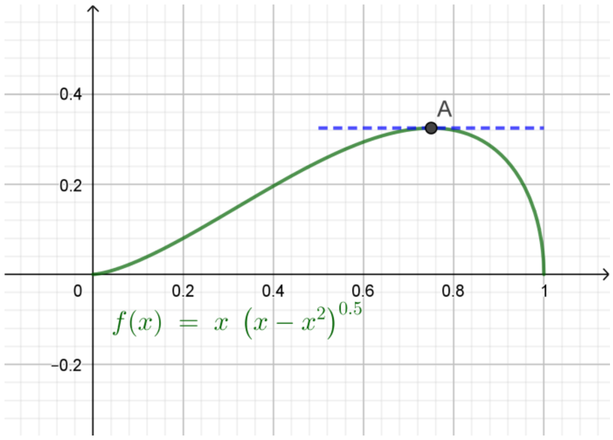

Figura 1

4. Il solido rotondo descritto nella rotazione di un giro completo attorno all'asse delle ascisse dal trapezoide della funzione relativo a tutto il dominio di definizione ha volume pari al valore del seguente integrale definito:

$$\int_0^1\pi\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_0^1\left[x\sqrt{x-x^2}\right]^2dx=$$

$$\pi\int_0^1\left(x^3-x^4\right)dx=\ \pi\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-0\right]=\frac{\pi}{20}$$

Una rappresentazione del solido è riportata in Figura 2.

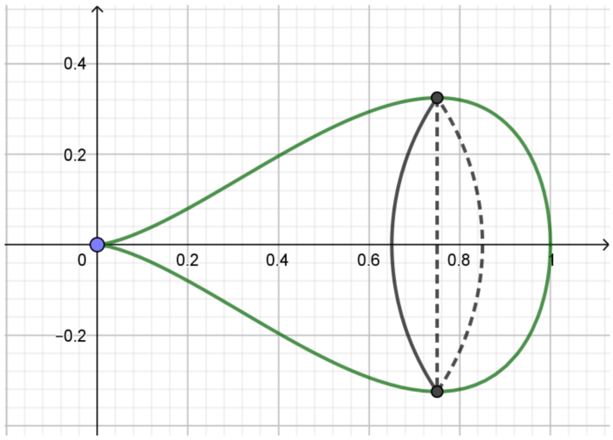

Figura 2