Disequazione goniometrica

Risolvere la seguente disequazione goniometrica

$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos x>1$, nell'intervallo $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Elaborazioni

1. Osserviamo che nell'intervallo assegnato risulta $\cos x \geq 0$; in particolare $\cos\frac{\pi}{2}=0$, quindi per $x=\frac{\pi}{2}$ il primo membro si annulla, perciò detto valore non è soluzione della disequazione. Il primo membro si annulla anche per $x=\frac{\pi}{4}$, dunque neanche questo valore è soluzione della disequazione.

   Ricerchiamo eventuali soluzioni della disequazione nell'insieme $\mathrm{A}=\left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ dove risulta $\cos x>0$.
2. Osserviamo che nell'intervallo $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ si ha $x-\frac{\pi}{4}<0$ dunque anche $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos x<0$, perciò i punti di detto intervallo non sono soluzioni della disequazione.
3. Stabiliamo se esistono soluzioni della disequazione nell'intervallo $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$.

   Notiamo che in questo intervallo è soddisfatta la disuguaglianza $x-\frac{\pi}{4}>0$, quindi la disequazione in esame è equivalente alla seguente $\cos x>\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}$. Ebbene la funzione lineare $f(x)=x-\frac{\pi}{4}$ è strettamente crescente su tutto l'asse reale e nell'intervallo in esame è positiva. Presi $x_1,x_2\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ tali che $x_1<x_2$ si verifica che $f(x_1)<f(x_2)$; passando ai valori reciproci vale la disuguaglianza $\frac{1}{f(x_1)}>\frac{1}{f(x_2)}$, cioè la funzione 1/*f*(*x*) in $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ è strettamente decrescente. La funzione 1/*f*(*x*) è strettamente decrescente e continua nell'intervallo]0;+∞[, dunque lo è anche in $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, per cui risulta $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}$ $=\frac{4}{\pi}\simeq 1{,}273\ldots$. Per la stretta decrescenza di 1/*f*(*x*) per ogni $x\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ è soddisfatta la disuguaglianza $\frac{1}{f(x)}>\frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}$.

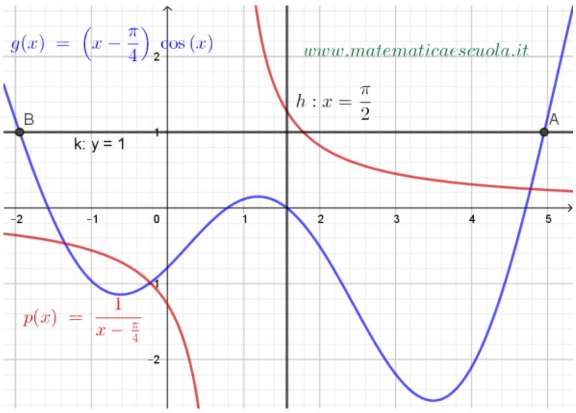

Figura 1

   Possiamo a questo punto concludere che nell'intervallo $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ la disequazione $\cos x>\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}$

non ha soluzioni perché risultando nell'intervallo $\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}>1,273...$ evidentemente la disuguaglianza

$\cos x>1,273...$ non è soddisfatta da alcun valore poiché per ogni x reale risulta -1≤ cos$x$ ≤1 .

Conclusione - La disequazione $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos x>1$, nell'intervallo $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ non ha alcuna soluzione.

In Figura 1 sono rappresentati parzialmente i grafici delle funzioni $\mathrm{g}(x)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos x$ e

$p(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}$, nonché le rette k:y=1 e h:x=π/2.

Si può osservare che nell'intervallo $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ il diagramma della funzione g(x) rimane al di sotto della retta k, quindi è soddisfatta la disuguaglianza g(x)<1.