Simulazione della seconda Prova dell'esame di Stato nel Liceo Scientifico assegnata nell'a.s. 2016/17

Quesito 5

Discutere la continuità e la derivabilità della seguente funzione reale

$$f(x)=\begin{cases} |x|^x & se \quad x\neq 0 \\ 1 & se \quad x=0 \end{cases}$$

e calcolare, se esistono, i seguenti limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Elaborazioni

La funzione in esame è definita su tutto l'asse reale e si esplicita come segue

$$f(x)=\begin{cases} (-x)^x & se \quad x<0 \\ 1 & se \quad x=0 \\ x^x & se \quad x>0 \end{cases}$$

Continuità

La funzione è certamente continua in ogni punto x≠0; occorre studiare i limiti laterali per x→0. La funzione sarà continua anche nel punto x=0 se i due limiti suddetti esistono, sono finiti e coincidenti con f(0).

Studiamo il limite per $x\to0^+$

$\lim_{x\to0^+} x^x = 0^0$, la forma è indeterminata. Poiché $x^x>0$ possiamo passare alla forma esponenziale-logaritmica.

$$\lim_{x\to0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln(x)}$$

Il limite della funzione all'esponente si presenta nella forma indeterminata 0·(-∞). Si tratta di un limite notevole il cui valore è 0 come mostriamo nella nota (1) a piè di pagina; pertanto, in virtù del teorema sul limite di una funzione composta, il limite in esame è e^0 =1.

Studiamo il limite per $x\to0^-$

Il limite si presenta ancora nella forma indeterminata 0^0 e si affronta con una tecnica simile a quella esposta nel caso precedente.

---

(1) Sussiste il seguente limite notevole, $\lim_{x\to0^+} x^r\log_a(x)=0$, $\forall r>0$, $a>0 \wedge a\neq1$. Infatti si ha

$$\lim_{x\to0^+} x^r\log_a(x)=,\lim_{x\to0^+}\frac{\log_a(x)}{x^{-r}}\overset{H.}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x\cdot\ln(a)}}{-rx^{-r-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\cdot\ln(a)}\cdot\frac{x^{r+1}}{-r}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^r}{-r\cdot\ln(a)}=0$$

$\lim_{x\to 0^-}(-x)^x = \lim_{x\to 0^-} e^{\ln(-x)^x} = \lim_{x\to 0^-} e^{x\ln(-x)}$ Il limite all'esponente è ancora della forma 0·(-∞). Con il cambio di variabile $-x=t$, si osserva che per $x\to 0^-$ si ha $t\to 0^+$ quindi

$\lim_{x\to 0^-} x\ln(-x) = \lim_{t\to 0^+}\left[-t\cdot\ln(t)\right]$ Il limite ottenuto rientra nel modello descritto nella nota (1), quindi vale ancora 0 e perciò anche $\lim_{x\to 0^-}(-x)^x = 1$.

Conclusione - I due limiti laterali esistono, sono finiti ed i valori coincidono con f(0), dunque la funzione in esame è continua anche in x=0 e perciò lo è in tutto R.

Derivabilità della funzione

Per x>0 e x<0 la funzione è derivabile. Si tratta di stabilire se la funzione è derivabile anche nel punto x=0.

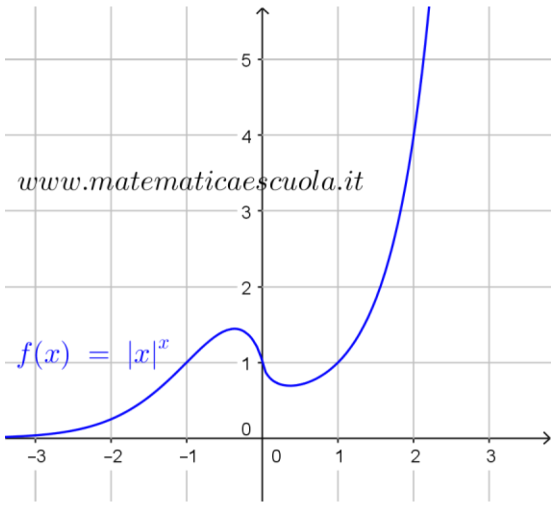
Possiamo studiare il limite del rapporto incrementale per $x\to 0^+$ e $x\to 0^-$. Si ha

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x} = \frac{0}{0}$ Sussistono le condizioni per applicare la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x} \overset{H.}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{D(x^x-1)}{D(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{D\left(e^{x\ln(x)}\right)-0}{1} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)}\cdot\left[1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)}\cdot\left[\ln(x)+1\right] =$$

$e^0\cdot\left[(-\infty)+1\right] = -\infty$ Avendo ottenuto un valore infinito si può già concludere che la funzione in oggetto non è derivabile in x=0.

Il lettore provi come esercizio che il limite del rapporto incrementale per $x\to 0^-$ è uguale a ancora a -∞. I due risultati dei limiti laterali della funzione derivata prima indicano che **nel punto x=0** il diagramma della funzione presenta un **punto di flesso a tangente verticale** (la tangente coincide con l'asse delle ordinate).



Studio dei limiti per x→+∞ e per x→-∞

$\lim_{x\to+\infty} x^x = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$;

$\lim_{x\to-\infty}(-x)^x = (+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

Osservazione

L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per il diagramma della funzione per x→-∞.

Nella figura a margine è riportato parzialmente il diagramma della funzione studiata.