QUESTIONARIO

Quesito 6 (Gestire un limite della forma indeterminata 0/0 con la presenza di un parametro)

Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

Risoluzione

Proviamo che deve risultare a=3.

La funzione in oggetto con a intero positivo è definita per x≠0 e il limite si presenta della forma 0/0; se a è intero negativo la funzione è definita per x≠0 ma il limite vale zero. Se a è reale positivo non intero la funzione è definita per x>0 e il limite si presenta della forma 0/0, mentre se a è reale negativo la funzione è definita per x>0 e il limite vale 0.

Caso a è intero positivo

Possiamo applicare per lo studio del limite la regola di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^a}\overset{H.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{ax^{a-1}}$$

Il limite residuo diventa notevole se a-1=2, cioè se a=3. Infatti sussiste il seguente il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

e ponendo nella forma a=3 per il limite residuo possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{ax^{a-1}}\overset{a=3}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2}=-\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=-\frac{1}{6}$$

Abbiamo ottenuto per il limite un valore finito diverso da zero, come richiesto.

Se a è intero maggiore di 3 possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{ax^{a-1}}\overset{a>3}{=}\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1-\cos(x)}{x^2ax^{a-3}}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{ax^{a-3}}\right]=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{a\cdot x^{a-3}}\right]$$

e il limite residuo esiste e vale -∞ quando a è dispari (5,7,...) , mentre se a è pari, il limite laterale per $x\to 0^+$ vale -∞ , il limite laterale per $x\to 0^-$ vale +∞, quindi il limite in oggetto non esiste.

Se a è intero minore di 3 il limite residuo $\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x^{a-3}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[-x^{3-a}\right]=0$ e il limite in oggetto vale 0, dunque non è diverso da zero.

Caso a è reale positivo non intero

Il procedimento da seguire è identico ma lo studio del limite va fatto per $x \to 0^+$. Si otterrà ancora per il limite valore -1/6 solo con a=3.

Tralasciamo la discussione dei casi a reale e diverso da 3. Anche in questi casi il limite non potrà avere valore finito diverso da zero.

Nota di approfondimento

Si può affrontare il limite in modo più veloce considerando lo **sviluppo di Taylor** di punto iniziale x=0 per la funzione $sen(x)$:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),$$

essendo come noto $o(x^5)$ un infinitesimo di ordine superiore a 5 per $x \to 0$. Il limite assume la seguente forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] - x}{x^a} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x^a} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^a} \cdot \left[-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} + o(x^2)\right]$$

Il primo fattore si semplifica e vale 1 solo se a=3 , mentre il secondo fattore tende a $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.

Per valori di a minori di 3 i limiti laterali della frazione x^3 / x^a per $x \to 0^-$, $x \to 0^+$ se hanno senso tendono a zero, quindi il limite nel complesso tende a 0·(-1/6)=0, dunque non è soddisfatta la richiesta che il valore del limite sia finito e diverso da zero.

Per valori di a maggiori di 3 i limiti laterali per $x \to 0^-$, $x \to 0^+$ se hanno senso tendono a valori infiniti, mentre l'espressione tra parentesi quadre tende comunque a -1/6, pertanto il limite, se esiste, non può essere finito e diverso da zero.

Si conclude che solo per a=3 il limite esiste, è finito e vale -1/6, quindi diverso da zero così come richiesto.