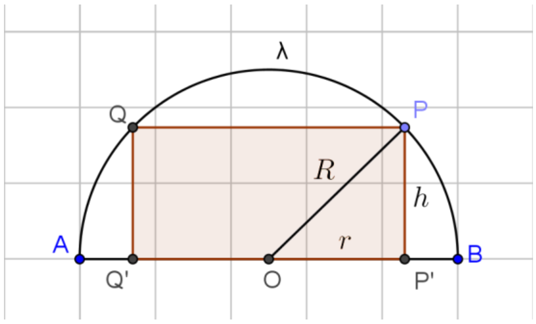
QUESTIONARIO

Quesito 2 (geometria razionale dello spazio)

Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno Dei 3/5 del volume della semisfera.

Risoluzione



Facciamo riferimento alla figura riportata a margine nella quale abbiamo rappresentato una sezione della semisfera, cupola di copertura della torta (semicirconferenza λ) e la corrispondente sezione della torta (rettangolo PQQ'P').

Abbiamo indicato con R il raggio della semisfera e con r il raggio del cilindro circolare retto inscritto nella cupola semisferica,rappresentativo della torta. Dobbiamo per quale valore del raggio r il volume del cilindro (quindi della torta) è massimo e confrontare successivamente questo valore con il volume della semisfera.

Dal triangolo rettangolo OPP' deduciamo che $\overline{P'P} = h = \sqrt{R^2 - r^2}$, con 0≤r≤R.

Il volume del cilindro è $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$, e si deve determinare per quale valore di r è massimo.

Determiniamo la derivata prima della funzione V(r) e studiamo segno e zeri.

$$V'(r) = \pi\left[2r\sqrt{R^2 - r^2} + r^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot (-2r)\right] = \frac{\pi r\left(2R^2 - 3r^2\right)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Sappiamo che r≥0, in particolare con r=0 il volume della torta è zero, quindi non può essere soluzione del problema, rimane r>0, per cui sarà $V'(r) \geq 0$ se e solo se risulta $2R^2 - 3r^2 \geq 0$ e ciò si verifica per $0 < r \leq \sqrt{\frac{2}{3}}R$. Per $0 < r < \sqrt{\frac{2}{3}}R$ la derivata prima è positiva, quindi la funzione volume è strettamente crescente, per $\sqrt{\frac{2}{3}}R < r < R$ la derivata prima è negativa, quindi la funzione volume è strettamente decrescente, quindi per $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ il volume è massimo e si ha $V_{\max} = \pi \frac{2R^3}{3\sqrt{3}}$.

Il volume racchiuso dalla cupola è quello della semisfera di raggio R, $V = \frac{2}{3}\pi R^3$,e confrontando il volume massimo della torta con questo si ha

$$\frac{V_{\max}}{V} = \pi \frac{2R^3}{3\sqrt{3}} : \left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0,577 = 57,7\%$$

Osservato che $\frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$, rimane acquisito che la torta di volume massimo che può essere coperta dalla cupola semisferica è inferiore al 60% del volume della semisfera.