Quesito sulle funzioni

Quesito 6 - Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta: "Esiste un polinomio P(*x*) tale che $\left|P(x)-\cos x\right| \le 10^{-3}, \forall x \in R$.

Risoluzione

Dimostriamo che non esiste alcun polinomio P(*x*) che verifica la proprietà indicata, quindi che **l'affermazione è FALSA**.

Osserviamo subito che ogni polinomio è definito su tutto l'asse reale e poiché anche la funzione cosx ha lo stesso dominio, la funzione $P(x)-\cos x$ ha come dominio tutto R.

Ciò premesso distinguiamo due casi.

1. Proviamo che il polinomio P(*x*) non può essere costante. Se fosse P(*x*)=k, con k∈R, la funzione $g(x)=k-\cos x$, definita su tutto R, avrebbe come codominio l'intervallo chiuso [k-1;k+1]; la funzione sarebbe periodica di periodo T=2π e l'insieme dei suoi valori descriverebbe infinite volte l'intervallo [k-1;k+1]. La condizione richiesta per la funzione $\left|P(x)-\cos x\right| \le 10^{-3}, \forall x \in R$, che diventerebbe $\left|k-\cos x\right| \le 10^{-3}, \forall x \in R$, significherebbe che dovrebbe risultare vera la doppia disuguaglianza $-10^{-3} \le k-\cos x \le 10^{-3}$ su tutto R, cioè anche $k-10^{-3} \le \cos x \le k+10^{-3}$. Ebbene, non può esistere un tale valore reale k perché:
   a. se k>10^{-3}+1, dalla disuguaglianza $\cos x \ge k-10^{-3}$ si ricava la catena $\cos x \ge k-10^{-3} > 10^{-3}+1-10^{-3}=1$, cioè $\cos x > 1$,che non è valida per alcun *x* reale;
   b. se k verifica la disuguaglianza k+10^{-3}<-1 , quindi se k<-10^{-3}-1, allora dalla disuguaglianza $\cos x \le k+10^{-3}$ si ricava la catena $\cos x \le k+10^{-3} < -10^{-3}-1+10^{-3}=-1$, quindi cos*x*<-1, chiaramente non soddisfatta dalla funzione cos*x*;
   c. per i valori residui di k, che sono i punti dell'intervallo [-10^{-3}-1;10^{-3}+1], osserviamo che se la disuguaglianza richiesta $\left|k-\cos x\right| \le 10^{-3}$ fosse vera ∀*x* ∈R allora funzione argomento del modulo dovrebbe assumere solo valori nell'intervallo [-10^{-3};10^{-3}] , invece, per la variabilità di k nell'intervallo [-10^{-3}-1;10^{-3}+1], possiamo dimostrare che la funzione k-cos*x* varia nell'intervallo [-10^{-3}-2;10^{-3}+2]. Infatti, sapendo che ∀*x* ∈R sono vere le due doppie disuguaglianze -1≤-cosx≤1, -10^{-3}-1≤k≤10^{-3}+1, sommandole membro a membro si ricava la doppia disuguaglianza (-10^{-3}-1)+(-1)≤k-cosx≤(10^{-3}+1)+1, da cui -10^{-3}-2≤k-cosx≤10^{-3}+2. Così, per fissare le idee, negli infiniti punti reali x=2hπ, con h∈R, se k=-10^{-3}-1 risulta k-cosx=-10^{-3}-1-1=-10^{-3}-2, come pure, negli infiniti punti reali x= (1+2h) π, se k=10^{-3}+1 risulta k-cosx=10^{-3}+2, ed è evidente che l'intervallo [-10^{-3};10^{-3}], non contenendo i valori -10^{-3}-2 , 10^{-3}+2, non può a maggior ragione contenere interamente il codominio della funzione k-cos*x* per ogni *x* reale.

Un modo diverso per provare la tesi.

Per una dimostrazione più veloce ed intuitiva della tesi si potrebbe osservare che l'intervallo [-10^{-3};10^{-3}] ha ampiezza 2·10^{-3}, mentre la funzione k-cosx, che si ottiene applicando la traslazione di vettore $\vec{V}=k\,y$ alla funzione -cosx ha come codominio l'intervallo [k-1;k+1] che ha ampiezza 2, come ha ampiezza 2 il codominio della funzione -cosx.

Le traslazioni sono delle isometrie e due funzioni che si ottengano l'una dall'altra applicando un'isometria hanno codominii (sottoinsiemi di R) che sono isometrici. Ebbene, l'intervallo [-10^{-3};10^{-3}] non è isometrico ad alcuno degli intervalli [k-1;k+1], dunque non è possibile che risulti $-10^{-3} \le k - \cos x \le 10^{-3}$.

2. Proviamo che P(x) non può essere un polinomio di grado maggiore o uguale ad uno.

Per giustificare l'affermazione premettiamo la seguente

Definizione di funzione limitata

Una funzione reale di variabile reale f:A→R, con A⊆R, si dice limitata se lo è il suo codominio e quindi se e solo se esiste M∈R$^+$ tale che per ogni x∈A risulta soddisfatta la disuguaglianza $|f(x)| \le M$.

Dimostriamo ora l'affermazione.

Un qualsiasi polinomio di grado maggiore o uguale ad uno è una funzione definita su tutto R ed è illimitata; in particolare, se il polinomio ha grado dispari il suo codominio è tutto R, se ha grado pari il termine di grado massimo tende a +∞ o a -∞, a seconda che il coefficiente corrispondente sia positivo o negativo, quindi comunque risulta

$$\lim_{|x| \to +\infty} |P(x)| = +\infty \,;$$

ciò implica che comunque si fissi M>0 esiste un $\bar{x}_M > 0$ tale che ∀x∈R per cui risulti $|x| > \bar{x}_M$ si avrà $|P(x)| > M$.

Facciamo ora notare che la funzione $P(x) - \cos x$ è somma di una funzione illimitata (il polinomio) con la funzione limitata -cos$x$, dunque anch'essa è illimitata. Se valesse la disuguaglianza richiesta $|P(x) - \cos x| \le 10^{-3}, \forall x \in R$

la funzione argomento $P(x) - \cos x$ sarebbe limitata, in contrasto con quanto appena precisato.

Si conclude che la disuguaglianza richiesta non può essere soddisfatta dal alcun polinomio avente grado maggiore o uguale ad uno.