QUESTIONARIO

Quesito n.9
Sul teorema di Lagrange

9. Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & 0\le x\le 1 \\ x^2-kx+k & 1<x\le 2 \end{cases}$$

determinare il parametro *k* in modo che nell'intervallo [0; 2] sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

Elaborazioni

Le proprietà che la funzione deve avere nell'intervallo [0;2] affinché verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange sono:

a) essere continua in tutto l'intervallo;

b) essere derivabile nell'intervallo aperto.

Le condizioni da soddisfare sono due, ma vi è un solo parametro. Tuttavia osserviamo che $f(1)=1$ e inoltre $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-kx+k\right)=1-k+k=1$, dunque la funzione è continua $\forall k\in R$, per cui il parametro sarà determinato imponendo che la funzione sia derivabile internamente all'intervallo.

La funzione derivata prima è

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & 0\le x<1 \\ 2x-k & 1<x\le 2 \end{cases}$$

La funzione è definita in ogni punto dell'intervallo, con esclusione del punto $x=1$. Imponiamo che i limiti laterali per $x\to 1$ della derivata prima siano finiti e coincidenti; questa condizione assicurerà che la funzione sarà derivabile anche nel punto $x=1$.

Risulta:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2=3;$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-k)=2-k$

Deve sussistere l'uguaglianza $2-k=3$, da cui $k=-1$.

La funzione in oggetto deve essere così definita:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & 0\le x\le 1 \\ x^2+x-1 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

Ricerca del punto x_0 previsto dal teorema di Lagrange

La tesi del teorema afferma che nelle ipotesi indicate sopra esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo [0;2] in cui la funzione e la sua derivata prima verificano la seguente uguaglianza

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(x_0).$$

Poiché $\frac{f(2)-f(0)}{2}=\frac{5-0}{2}=\frac{5}{2}$, si deve risolvere l'equazione

$$f'(x)=\frac{5}{2}$$

effettuando separatamente lo studio nei due intervalli [0;1] e]1;2], visto che la forma analitica della funzione derivata prima è diversa nei due intervalli.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & 0\le x\le 1 \\ 2x+1 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

Ricerca nell'intervallo [0;1]

$3x^2=\frac{5}{2}$, da cui $x=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$. Notiamo che $x=\sqrt{\frac{5}{6}}\in\left]0;1\right[$, quindi è un punto che soddisfa la tesi del teorema di Lagrange.

Ricerca nell'intervallo]1;2]

$2x+1=\frac{5}{2}$, da cui $x=\frac{3}{4}\notin\left]1;2\right]$.

Quindi nella seconda parte dell'intervallo non esiste alcun altro punto che verifichi la tesi del teorema.

Conclusione

L'unico punto che verifica la tesi del teorema di Lagrange è $x_0=\sqrt{\frac{5}{6}}$.

A margine è riportato il diagramma della funzione limitatamente al dominio di definizione.
In figura si osservano i due archi che formano il diagramma, riportati con colori diversi; è indicata anche la retta tangente al diagramma nel punto A(1;*f*(1))≡(1;1).

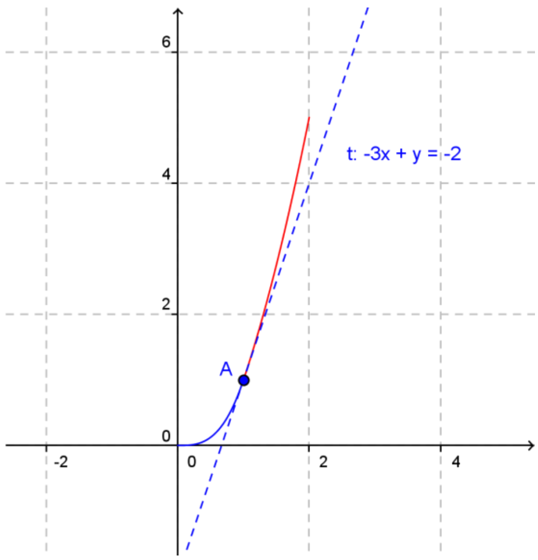

Figura 1- Diagramma della funzione e retta tangente nel punto A(1;f(1)) di raccordo dei due archi del grafico.

Commento

Esercizio teorico e applicativo che mira a riconoscere se il candidato conosce il teorema di Lagrange e lo sa applicare.
Come **indice di difficoltà**, in una scala da 1 a 5, direi **fra 2 e 3**.