QUESTIONARIO

Quesito n.3 (Probabilità)

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

Risoluzione

3. I due eventi di cui si chiedono le probabilità rientrano negli eventi associati a "prove ripetute" ; precisamente, posto E= "nel lancio di una moneta si presenta testa", il numero k di volte che E si può verificare nell'esecuzione di **n** lanci è una **variabile aleatoria**.

***

Richiamo teorico

*In un **esperimento ripetibile** quante volte si vuole, sia **E** un evento e **p** la probabilità che nell'esperimento l'evento si verifichi. Indichiamo con **q=1-p** la probabilità che l'evento E nell'esperimento non si verifichi.*

*Immaginando di ripetere l'esperimento **n volte**, sia X la v.c. che indica il numero di volte che l'evento E si è verificato nelle n prove. Evidentemente, data l'aleatorietà di E, nelle n prove la v.c. X può assumere uno qualsiasi dei valori naturali 0; 1;2; …;n.*

La probabilità che X=k, con $k \in \{0;1;2;\dots;n\}$ è

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

La distribuzione di probabilità è detta binomiale per la presenza nella stessa del coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$.

***

Nell'ipotesi che la moneta utilizzata nei lanci sia regolare, evidentemente risulta P(E)=1/2=0,5=p e dunque anche q=1-p=0,5.

Nel caso in esame si suppone che si effettuino **6 lanci**. I due eventi E_1, E_2 di cui determinare la probabilità sono

E_1=" in 6 lanci si presenta testa al massimo 2 volte";

E_2=" in 6 lanci si presenta testa almeno 2 volte"

Sia *X la v.c. che indica il numero di volte che l'evento E si verifica nelle 6 prove.*

La probabilità di E_1 è

$$P(E_1)= P\big((X=0)\vee(X=1)\vee(X=2)\big)=$$

$$\binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\left[\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$$

Secondo evento

Per il calcolo della probabilità dell'evento E_2, osserviamo che la sua **negazione** è l'evento $\overline{E_2}$ ="in 6 lanci il numero di volte che si presenta testa è al massimo 1", la cui probabilità è

$$P\left(\overline{E_2}\right)=P\big((X=0)\vee(X=1)\big)=\left[\binom{6}{0}+\binom{6}{1}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{7}{64}$$

In virtù del **teorema sulla probabilità dell'evento contrario** la probabilità dell'evento E_2 è

$$P(E_2)=1-P\left(\overline{E_2}\right)=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}.$$