QUESTIONARIO

Quesito 10

Si stabilisca per quali valori reali di a e b, si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-2}{x}=1$

Soluzione

Osservato che il denominatore della frazione tende a zero, si deve stabilire per quali valori dei due parametri a e b il limite si presenta della forma 0/0 e fornisce come risultato 1.

Affinché il numeratore si annulli per x→0 deve risultare $\sqrt{a}-2=0$, dunque a=4; il limite deve perciò essere

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x}$, ovviamente con b≠0.

Lo si può studiare razionalizzando il numeratore

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+bx}-2\right)\left(\sqrt{4+bx}+2\right)}{x\left(\sqrt{4+bx}+2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{bx}{x\left(\sqrt{4+bx}+2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{b}{\sqrt{4+bx}+2}=\frac{b}{4}$$

Poiché il limite deve valere uno deve risultare $\frac{b}{4}=1$, da cui b=4. Concludiamo che il limite in oggetto è

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+4x}-2}{x}$, che ovviamente esiste e vale 1.

Osservazione

Il limite ottenuto si può riconoscere essere collegato ad un particolare limite notevole. Infatti,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+4x}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-2}{x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}$$

e si riconosce la presenza del limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}=\frac{1}{2}$.