Ministero dell'istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo:PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di:MATEMATICA

QUESTIONARIO

10. Si stabilisca per quali valori k∈R l'equazione $x^2(3-x)=k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo [0;3]. Posto k=3, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

Soluzione

Prima parte del quesito

Per rispondere al quesito mettiamo a confronto il grafico della cubica $\gamma: y=x^2(3-x)$ con quello della retta $r: y=k$, al variare di k reale. Per tale confronto è necessario rappresentare la cubica e ciò si ottiene studiando la corrispondente funzione polinomio $P(x)=x^2(3-x)$.

Gli zeri della funzione sono x=0 e x=3; la funzione è positiva per x<3 (e $x\neq0$) e negativa per x>3. La sua derivata prima è $P'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)$, che si annulla in x=0 e x=2. Studiano il segno di $P'(x)$ risulta:

$P'(x)>0$ per $0<x<2$ e $P'(x)<0$ per $(x<0)\vee(x>2)$. Si conclude che x=0 è punto di minimo relativo proprio e x=2 punto di massimo relativo proprio con P(2)=4.Il diagramma della cubica è riportato in Figura 1.

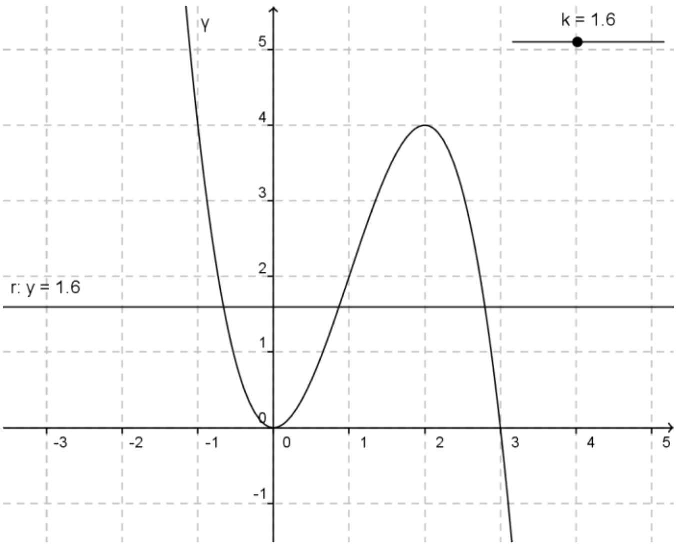


Figura 1

Discussione sul numero delle soluzioni $x^2(3-x)=k$ nell'intervallo [0;3]

Con k= 0 la retta interseca la cubica nell'origine degli assi e nel punto A(0;3). La radice x=0 è doppia, mentre x=3 è semplice. Le radici appartengono tutte all'intervallo [0;3].

Con $0<k<4$ la retta interseca la cubica in tre punti distinti dei quali uno si trova nel secondo quadrante e gli altri due nel primo quadrante. Indicando con x_1, x_2, x_3 i valori delle ascisse di detti punti risulta $x_1<0<x_2<x_3<3$; pertanto nell'intervallo [0;3] ricadono due delle tre radici e i due valori sono distinti.

Con k=4, la retta è tangente al diagramma della funzione nel suo punto di massimo e le intersezioni si riducono a due punti dei quali uno si trova nel secondo quadrante e l'altro nel primo quadrante; le radici dell'equazione in oggetto sono tre della quali una semplice, $x_1<0$ e due coincidenti: $x_2=x_3=2$. Evidentemente solo x_2 e x_3 appartengono all'intervallo [0;3] ma essendo coincidenti il valore di k=4 non è accettabile.

Con k>4 la retta interseca la cubica in un solo punto avente ascissa negativa, quindi non vi sono radici appartenenti all'intervallo [0;4].

Solo per completezza, facciamo notare che per k<0 la retta interseca la cubica in un solo punto avente ascissa maggiore di tre e quindi l'equazione in esame non ha radici appartenenti all'intervallo [0;3].

Seconda parte del quesito

Con k=3 l'equazione diventa $x^2(3-x)=3$, cioè $x^3-3x^2+3=0$

Dalla precedente discussione sappiamo che l'equazione ammette tre radici reali e distinte, due delle quali sono interne all'intervallo [0;3]; in particolare, dalla conoscenza dell'ascissa del punto di massimo $x=2$, si deduce che la maggiore delle radici è compresa tra 2 e 3. Si richiede di questa radice un'approssimazione con due cifre decimali.

Metodi iterativi applicati: metodo delle tangenti e delle secanti

Applicabilità dei metodi

Consideriamo la funzione polinomiale $f(x)=x^3-3x^2+3$.

La funzione ha derivata prima $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ che nell'intervallo]2;3] è strettamente positiva; inoltre, la funzione derivata seconda $f''(x)=6x-6$, nell'intervallo [2;3] è positiva, quindi la concavità della curva è rivolta verso l'alto.

Per la ricerca dell'unico zero $x=\alpha$ interno all'intervallo]2;3[sono applicabili i due metodi quello delle tangenti, con cui otterremo approssimazioni per eccesso di α, e quello delle secanti con cui otterremo approssimazioni per difetto dello stesso valore.

Applicazione del metodo delle tangenti

Algoritmo

1) Si scrive l'equazione della tangente alla curva in B(3;f(3)) e si determina il punto P_1 in cui taglia l'asse delle ascisse; sia x_1 l'ascissa di P_1. Risulterà $\alpha< x_1<3$.

2) Si scrive l'equazione della tangente alla curva nel punto $B_1(x_1;f(x_1))$ e si determina l'ascissa x_2 del punto P_2 in cui detta tangente taglia l'asse x. Risulterà $\alpha< x_2<x_1<3$.
3) Il procedimento continua scrivendo l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $B_2(x_2;f(x_2))$….

Sia $B_n(x_n;f(x_n))$ il punto della curva trovato al passo n-simo; l'equazione della retta tangente alla curva in detto punto è

$$t_n : y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \qquad (1)$$

che taglia l'asse delle ascisse nel punto

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (1.1)$$

A partire dalla (1.1), scelto come punto iniziale $x_0=3$, si determinano iterativamente quante approssimazioni si desiderano di α.

La (1.1) assume la seguente forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 3}{3x_n(x_n - 2)} \qquad (1.2)$$

In tabella 1 sono riportate alcune elaborazioni ottenute applicando l'algoritmo delle tangenti tramite Excel. In particolare si noti che x_4 e x_5 coincidono fino alla sesta cifra decimale.

Tabella 1

Metodo delle tangenti		
n	x_n	x_{n+1}
0	3	2,666667
1	2,666667	2,548611
2	2,548611	2,53239
3	2,53239	2,532089
4	2,532089	2,532089
5	2,532089	2,532089

Possiamo affermare al momento che $\alpha<2,532089$…

Applicazione del metodo delle secanti

Algoritmo

1) Si scrive l'equazione della retta secante il grafico congiungete i punti $A(2;f(2))$ e $B(3;f(3))$.
2) Determinare il punto C_1 in cui la prima secante taglia l'asse delle ascisse; sia x_1 l'ascissa di C_1. Risulterà $x_1<\alpha$.
3) Si scrive l'equazione della secante alla curva congiungente i punti $A_1(x_1;f(x_1))$ e $B(3;f(3))$ e si determina l'ascissa x_2 del punto C_2 in cui detta retta taglia l'asse x. Risulterà $x_1<x_2<\alpha$.
4) Il procedimento continua scrivendo l'equazione della secante alla curva congiungente i punti $A_2(x_2;f(x_2))$ e il punto B $(3;f(3))$….

Sia $A_n(x_n;f(x_n))$ il punto della curva trovato al passo n-simo; l'equazione della retta secante $[A_n;B]$ alla curva è

$$s_n : \frac{x - x_n}{3 - x_n} = \frac{y - f(x_n)}{3 - f(x_n)} \qquad (2)$$

che taglia l'asse delle ascisse nel punto

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{3 - f(x_n)}(3 - x_n) \qquad (2.1)$$

La (2.1) assume la seguente forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 3}{3 - (x_n^3 - 3x_n^2 + 3)} \cdot (3 - x_n)$$

che si riduce alla semplice forma

$$x_{n+1} = 3\left(1 - \frac{1}{x_n^2}\right), \text{ con } n=0, 1,2,\ldots \text{ e } x_0 = 2$$

In Tabella 2 sono riportate alcune elaborazioni ottenute con Excel.

Si osservi come i valori x_n crescano e che da x_7 si stabilizza la seconda cifra decimale risultando x_7=2,531117…

Tabella 2

Metodo delle secanti		
n	x_n	x_{n+1}
0	2	2,25
1	2,25	2,407407
2	2,407407	2,482367
3	2,482367	2,513157
4	2,513157	2,525013
5	2,525013	2,529463
6	2,529463	2,531117
7	2,531117	2,531729
8	2,531729	2,531956
9	2,531956	2,53204
10	2,53204	2,532071
11	2,532071	2,532082

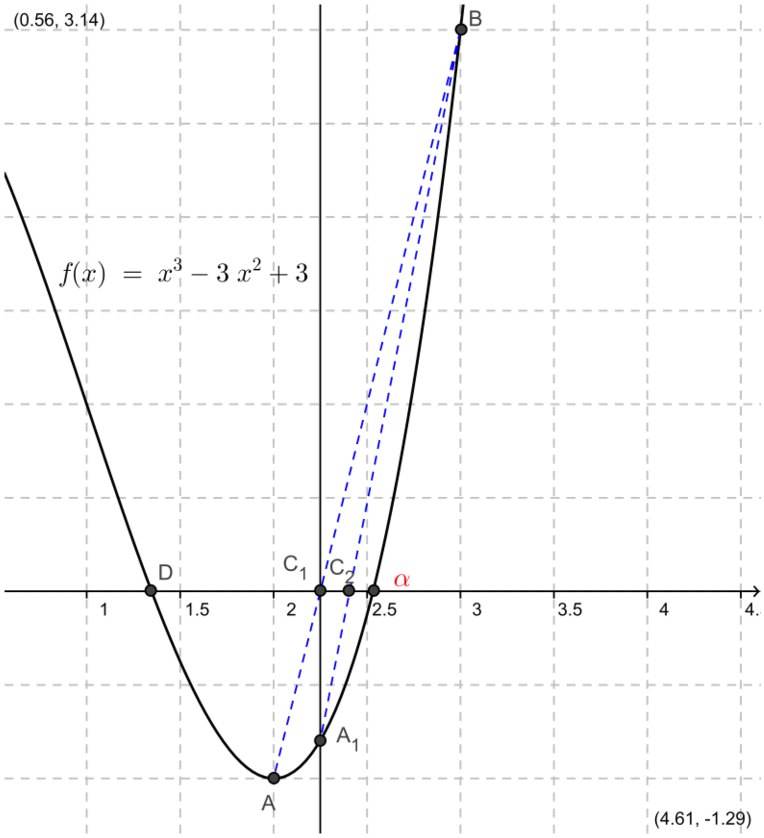
Conclusione della ricerca

Confrontando le approssimazioni ottenute con i due metodi possiamo affermare che risulta senz'altro

2,532071<α<2,532089

e dunque, visto che il quesito richiedeva che si fornisse un'approssimazione di α con due cifre decimali (esatte), si può concludere che **α ≈2,53**.

Riportiamo un'immagine grafica che illustra il metodo di ricerca basato sulle secanti.



Commento

La risoluzione completa di questo quesito richiede il possesso di diverse conoscenze e competenze, non escluse quelle di analisi numerica. Per risolverlo completamente il candidato deve applicarsi molto di più che per gli altri quesiti del questionario. Ritengo che questo quesito possa essere ritenuto equivalente alla risoluzione di ciascuno dei due problemi proposti.

Sul tema del diverso livello di difficoltà dei quesiti e dei problemi proposti nelle tracce ministeriali e sull'opportunità di valutare le elaborazioni dei candidati per quello che effettivamente dimostrano di possedere con lo svolgimento della prova scritta mi sono soffermato abbondantemente negli anni scorsi e mi sembra che a livello ministeriale "non si vogliano riconoscere le competenze specifiche" e ci si limita a precisare che "il candidato deve risolvere un problema e cinque quesiti" (per assolvere al compito cui è chiamato!).