M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO (**quesiti 3-4**)

3. Sia γ il grafico di $f(x)=e^{3x+1}$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x,f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

Soluzione

Ricordiamo che considerata una funzione y=f(x), se x_0 è un punto del dominio in cui la funzione è derivabile, allora il diagramma della funzione ammette nel punto $P\left(x_0; f(x_0)\right)$ retta tangente e l'equazione di detta retta è: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.
Ricordiamo altresì che in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali la pendenza di una retta rispetto all'asse delle ascisse è rappresentata dalla tangente goniometrica dell'angolo che detta retta forma con la direzione positiva dell'asse x. Ogni retta che non sia perpendicolare all'asse delle ascisse ammette nel piano cartesiano equazione del tipo y=mx+q; **m** rappresenta il **coefficiente angolare** della retta e si dimostra che coincide con la pendenza della retta rispetto all'asse delle ascisse.

Ciò premesso, possiamo intanto affermare che la pendenza della retta tangente al diagramma della funzione nel punto $P\left(x_0; f(x_0)\right)$ è rappresentata dal valore della derivata prima nel punto: $f'(x_0)$.

Per risolvere il quesito posto, una volta osservato che la funzione in esame è definita su tutto l'asse reale ed è derivabile in ogni punto del dominio, si tratta di calcolare la sua funzione derivata prima $f'(x)$ e risolvere l'equazione $f'(x)=2$ nell'incognita x. Risulta:

$$f(x)=e^{3x+1} \to f'(x)=3e^{3x+1}$$

$$f'(x)=2 \to 3e^{3x+1}=2 \to 3x+1=\log\left(\frac{2}{3}\right) \to x=\frac{1}{3}\left(-1+\log\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

Esiste dunque un solo punto P del diagramma della funzione in cui la retta tangente ha la proprietà richiesta.
* * * * *

4. Si calcoli: $\lim_{x\to\infty} 4x\sin\frac{1}{x}$

Soluzione

Premessa - La forma con cui è scritto il limite, per convenzione, sta ad indicare che il risultato del limite è lo stesso sia per $x\to+\infty$, che per $x\to-\infty$.

I limiti indicati nella premessa si presentano nella forma indeterminata $\infty\cdot 0$ ma si possono trasformare nella forma 0/0 scrivendo la funzione nel modo seguente

$$f(x)=4\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

ed effettuando il cambio di variabile ponendo $\frac{1}{x}=t$. Per i due limiti indicati si osserva che per $x\to+\infty$ risulta $t\to 0^+$ e per $x\to-\infty$ risulta $t\to 0^-$. Riportiamo lo studio dei due limiti.

Primo

$$\lim_{x\to+\infty} 4x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty} 4\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^+} 4\frac{\sin t}{t}=4\cdot 1=4$$

Secondo

$$\lim_{x\to-\infty} 4x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty} 4\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^-} 4\frac{\sin t}{t}=4\cdot 1=4$$

Come si vede i due limiti hanno lo stesso valore.

* * * * *