Risoluzione e commento del Quesito 8

8. Si provi che l'equazione
$$x^{2009}+2009x+1=0$$
ha una sola radice compresa tra -1 e 0.

Soluzione

Prima parte
Osserviamo che l'equazione è di grado dispari e che ogni polinomio intero di grado dispari ammette almeno una radice reale. La giustificazione di questa affermazione, senza voler richiamare il teorema fondamentale dell'algebra, può essere data richiamando il **teorema di esistenza degli zeri di una funzione continua**. Infatti, ogni polinomio di grado dispari per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$, i valori dei due limiti sono comunque opposti. Questa proprietà, unita al **teorema della permanenza del segno**, permette di affermare che:

- se il coefficiente del termine di grado massimo è positivo allora il polinomio per $x \to +\infty$ assume definitivamente valori positivi e per $x \to -\infty$ assume valori definitivamente negativi;
- se il coefficiente del termine di grado massimo è negativo allora il polinomio per $x \to +\infty$ assume definitivamente valori negativi e per $x \to -\infty$ assume valori definitivamente positivi.

Ebbene, considerato che i polinomi sono funzioni continue, basta richiamare il teorema di esistenza degli zeri per concludere che il polinomio ammette certamente almeno uno zero, cioè una radice.

Seconda parte
Occorre ora dimostrare che la radice è unica e che il suo valore è interno all'intervallo [-1;0]. Per questo notiamo intanto che la funzione $f(x)=x^{2009}+2009x+1$ assume agli estremi dell'intervallo valori discordi:
$f(-1)=-2009<0$, $f(0)=1>0$,
dunque per il teorema di esistenza degli zeri ammette almeno uno zero internamente all'intervallo. Per riconoscere che lo zero è unico è sufficiente dimostrare che la funzione internamente all'intervallo risulta o strettamente crescente, oppure strettamente decrescete. Poiché la funzione è derivabile possiamo sfruttare il segno della funzione derivata prima.
La funzione **derivata prima** è
$f'(x)=2009x^{2008}+2009$
che si riconosce che **per ogni x reale assume valore positivo**, quindi la funzione $f(x)$ è strettamente crescente in ogni punto del dominio e poiché il dominio è tutto l'asse reale la funzione è anche strettamente crescente su tutto R, dunque anche nell'intervallo]-1;0[. Questa conclusione permette di affermare che internamente all'intervallo]-1;0[la funzione $f(x)$ ammette solo una radice.

Osservazione (una dimostrazione per assurdo)
Si potrebbe fornire una dimostrazione diversa dell'unicità della radice internamente al'intervallo [-1;0] sfruttando il **teorema di Rolle**.
Sviluppiamo il seguente ragionamento (per assurdo).

Se esistessero internamente all'intervallo due radici distinte, diciamole α_1, α_2, poiché la funzione nell'intervallo chiuso [-1;0] verifica le ipotesi del teorema di Rolle[1], allora esisterebbe internamente all'intervallo almeno un punto x_0 in cui si annullerebbe la derivata prima; dunque, $\exists\, x_0 \in \left]-1;0\right[: \; f'(x_0)=0$. Questa conclusione, però, contrasta con la precedente affermazione con cui abbiamo precisato che la funzione derivata prima assume valore positivo in ogni punto reale. Dunque non possono esserci due radici distinte dell'equazione in]-1;0[e la tesi è così acquisita.

Commento

Un quesito interessante e simpatico anche per la presenza del numero 2009 nella struttura della funzione. Il quesito permette di verificare se il candidato conosce il teorema degli zeri e se lo sa applicare.

La difficoltà di risoluzione non è eccessiva, e ritenerla di livello 3.

Livello di difficoltà : 3

[1] Per la funzione in questione, limitatamente all'intervallo [-1;0], le ipotesi richieste dal teorema di Rolle sono: essere continua in tutto l'intervallo, essere derivabile all'interno dell'intervallo, assumere agli estremi dell'intervallo lo stesso valore.