Problema 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x\in$ R.

1. Si verifichi che la derivata prima di $f(x)$ è: $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$
2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x)\le 1$ per ogni x reale.
3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando n=2 e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli e se ne dia l'interpretazione geometrica. $\int_0^2 g(x)dx$

Soluzione

1. Prima di passare alle elaborazioni ricordiamo il significato di n!.

Con n numero naturale si ha

$0!=1,\ \ n!=n\cdot(n-1)!$.

La funzione assegnata ha come dominio tutto l'asse reale, è continua ed ammette derivate di qualsiasi ordine. Determiniamo la funzione derivata prima applicando la regola di derivazione per il prodotto di due funzioni.

$$f'(x)=\left(0+1+\frac{2x}{2}+\frac{3x^2}{3\cdot 2!}+...+\frac{nx^{n-1}}{n\cdot(n-1)!}\right)e^{-x}-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}=$$

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x}-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x}-\frac{x^n}{n!}e^{-x}=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

2. Per rispondere al quesito, considerato che la funzione è definita in un intervallo, è sufficiente studiare il segno della derivata prima e determinare i suoi zeri. Occorre prestare attenzione alla presenza del parametro n e distinguere i seguenti casi: n=0, n dispari, n pari.

Caso n=0

La funzione diventa $f(x)=e^{-x}$, che è la funzione esponenziale. Si tratta di un caso notevole. Essa assume valori positivi per ogni x reale, non ha minimo assoluto, né minimi relativi, come non ha massimo assoluto, né massimi relativi. Il suo diagramma ammette come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse per x⟶+∞. Risulta Inf(f)=0, Sup(f)=+∞. La rappresentazione del diagramma è in Figura 1.

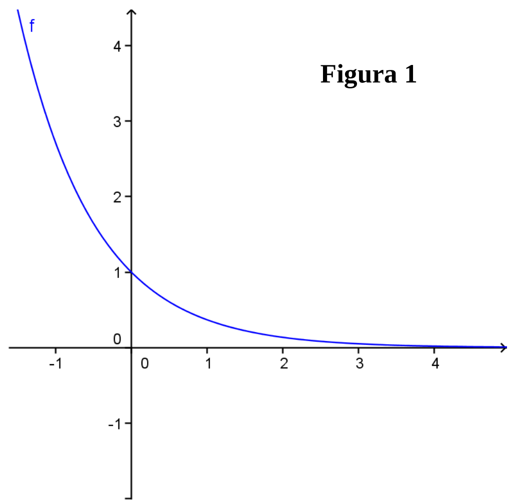


Figura 1

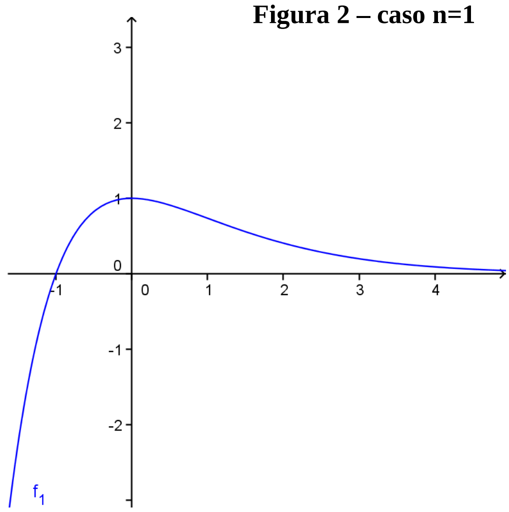
Caso n-dispari

Osserviamo che la funzione derivata prima si annulla solo nel punto x=0, è positiva per x<0, mentre è negativa per x>0. Deduciamo che la funzione è strettamente crescente nell'intervallo]-∞;0[, è strettamente decrescente nell'intervallo]0;+∞[e che il punto x=0 è di massimo assoluto risultando $f(0)=1$. E' dunque vero che per n dispari risulta $f(x)\leq 1$ su tutto il dominio. In Figura 2 è rappresentato parzialmente il diagramma della funzione con n=1.

Caso n_pari

Per questi valori di *n* la funzione derivata prima si annulla nel punto x=0 ed assume valore negativo per ogni altro valore della variabile, deduciamo che la funzione è strettamente decrescente in tutto il dominio(1) e dunque non può ammettere punti di massimo relativo, né di minimo relativo. Dallo studio dei limiti per x→-∞ e per x→+∞ si determinano rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore. Si ha:

Figura 2 – caso n=1



$$Sup(f)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$$

$$Inf(f)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-x}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

Il codominio della funzione è]0;+∞[. Il valore zero non è minimo, ma solo estremo inferiore. La funzione non ammette né massimo, né minimo assoluti.

3. **Casso n=2**

La funzione in questione è $g(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$.

Per quanto visto nel precedente punto sappiamo che la funzione assume solo valori positivi ed ha come codominio l'intervallo]0;+∞[. Non ha punti di massimo relativo, né di minimo relativo e neanche punti di massimo o di minimo assoluto. Il suo diagramma per x→+∞ ammette come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse, mentre si riconosce velocemente (lasciamo il compito al lettore) che per x→-∞ non esiste alcun asintoto.
E' necessario studiare la derivata seconda per stabilire la concavità e la convessità e determinare eventuali flessi.

Sappiamo che $g'(x)=-\frac{x^2}{2!}e^{-x}=-\frac{x^2}{2}e^{-x}\to g''(x)=-xe^{-x}+\frac{x^2}{2}e^{-x}=\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$;

$g''(x)>0$, per (x<0)∨(x>2);
$g''(x)<0$, per (0<x<2);
$g''(x)=0$, per (x=0)∨(x=2).

La funzione è convessa (il suo diagramma volge la concavità verso l'alto) in ciascun punto dei due intervalli]- ∞;0[,]2;+ ∞ [, mentre è concava nell'intervallo]0;2[. Il punto x=0 è di flesso discendente, il punto x=2 è di flesso ascendente: $F_1(0;1)$, $F_2(2;5e^{-2})$.

In Figura 3 è riportato il diagramma.

---

(1) Se si applica la definizione di funzione strettamente decrescente in un punto si riconosce che la funzione è strettamente decrescente anche nel punto x=0.

4. Calcolo dell'integrale definito $\int_0^2 g(x)dx$

E' necessario calcolare prima l'integrale indefinito e si procede con il metodo di integrazione per parti che deve essere applicato due volte prima di ricondursi ad un integrale immediato. Riportiamo i passaggi senza ulteriori commenti.

$$\int\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx = \int\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)D\left(-e^{-x}\right)dx =$$

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(-e^{-x}\right)+\int(1+x)e^{-x}dx =$$

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(-e^{-x}\right)+\int(1+x)D\left(-e^{-x}\right)dx =$$

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(-e^{-x}\right)+(1+x)\left(-e^{-x}\right)+\int e^{-x}dx =$$

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(-e^{-x}\right)+(1+x)\left(-e^{-x}\right)-e^{-x}+C$$

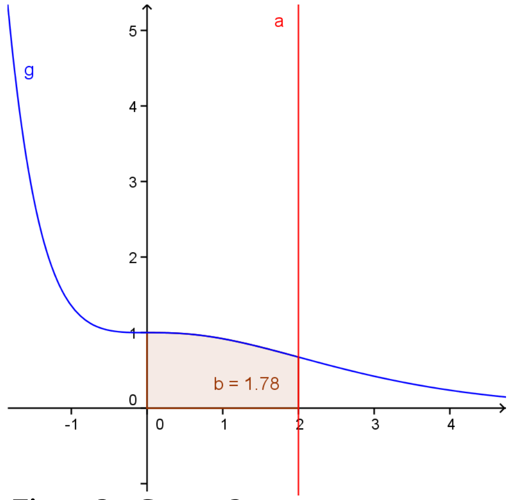


Figura 3 – Caso n=2

$=\left(3+2x+\frac{x^2}{2}\right)\left(-e^{-x}\right)+C$, essendo C una costante reale.

Per l'integrale definito si ha:

$$\int_0^2 g(x)dx = \left[-e^{-x}\left(3+2x+\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^2 = 3-9e^{-2} \approx 1,78\,.$$

Il valore numerico ottenuto rappresenta l'area della regione piana (trapezoide) delimitata dal diagramma della curva, dall'asse delle ascisse, dall'asse delle ordinate e dalla retta di equazione x=2. In Figura 3 la regione suddetta è rappresentata in colore.