Esame di Stato di Liceo Scientifico
Corso di Ordinamento

Indirizzo: Scientifico
Tema di: Matematica

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (*logaritmo naturale*).

1. Sia A il punto di intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto di intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con *a* reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base *a* è δ=45°? E per quale valore di *a* è δ=135°?
3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione y=1. Si calcoli l'area di **D.**
4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione x=-1.

Sviluppo dei quesiti

Quesito 1

Sia A il punto di intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto di intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con *a* reale positivo diverso da 1?

Soluzione

Il generico punto P sulla curva logaritmica ha coordinate $P(k;\log k)$, con *k*>0, e l'equazione della retta tangente alla curva nello stesso punto è

$$t_P : y - \log k = \frac{1}{k}(x - k)$$

L'equazione della retta *s* per P e parallela all'asse delle ascisse è *y=logk*. I punti di intersezione con l'asse delle ordinate rispettivamente delle due rette t_P, *s* sono:

$$A(0;-1+\log k),\ B(0;\log k)$$

La misura del segmento AB è uguale al modulo della differenza tra le ordinate dei due estremi: $\left|\overline{AB}\right| = |y_B - y_A| = 1$

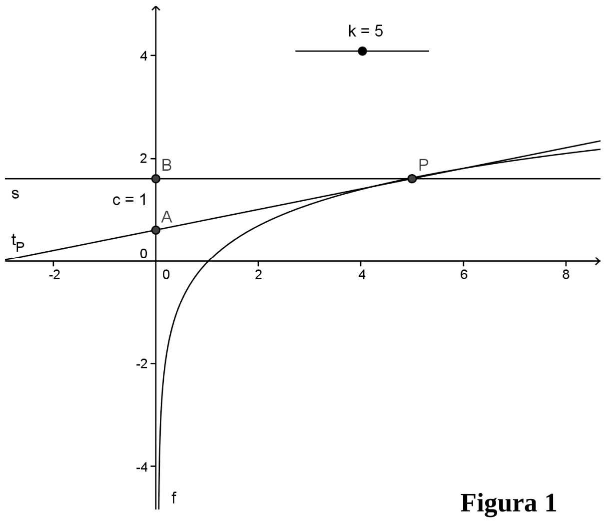


Figura 1

Come si vede, la misura del segmento AB non dipende dalla scelta del punto P sulla curva logaritmica perché nella differenza tra le ordinate dei due estremi A, B si elidono i termini contenenti il parametro, pertanto la misura del segmento AB rimane costante al variare del punto P sulla curva logaritmica.

Sviluppando le stesse considerazioni per la funzione $g(x) = \log_a x$ si dimostra che la misura del segmento AB è ancora costante ma vale $\left|\overline{AB}\right| = \frac{1}{|\log a|}$. Di seguito riporto i risultati delle elaborazioni senza ulteriori commenti lasciando al lettore il compito di verificarli; aggiungo solo che la posizione dei due punti A, B sull'asse delle ordinate nel caso in cui la base *a* del logaritmo è maggiore di uno si trovano disposti come in Figura 1, cioè B ha ordinata maggiore di A, nel caso in cui 0<*a*<1 allora è A ad avere ordinata maggiore rispetto a B.

Punto P: $P\left(k;\log_a k\right)$;

retta per P parallela all'asse delle ascisse: $s: y=\log_a k$;

tangente in P alla curva logaritmica: $t_P: y-\log_a k=\dfrac{1}{k\log a}\left(x-k\right)$;

coordinate dei punti A, B: $A\left(0;\log_a k-\dfrac{1}{\log a}\right)$, $B\left(0;\log_a k\right)$;

misura del segmento AB: $\left|\overline{AB}\right|=\left|y_B-y_A\right|=\left|\dfrac{1}{\log a}\right|$

Quesito 2

Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base *a* è δ=45°? E per quale valore di *a* è δ=135°?

Soluzione

Sia Q il punto in cui la curva logaritmica incontra l'asse delle ascisse. Risulta: $Q\left(1;log_a 1=0\right)$. Per rispondere al quesito è necessario ricordare il significato di pendenza di una retta rispetto all'asse delle ascisse nel piano cartesiano.

La pendenza di una retta rispetto all'asse delle ascisse*, se la retta non è perpendicolare allo stesso asse, è la tangente goniometrica dell'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse x.*

Ciò premesso, scriviamo l'equazione della retta t_Q tangente alla curva logaritmica nel punto Q; la pendenza di questa retta è rappresentata dal valore della derivata prima della funzione nel punto $x=x_Q=1$; poiché si richiede che l'angolo formato dalla retta tangente con la direzione positiva sia nel primo caso di 45° e nel secondo caso di 135°, risolvendo le due corrispondenti equazioni di troveranno i valori della base *a* della funzione logaritmica.

Equazione della tangente a G_g: $t_Q: y=\dfrac{x-1}{\log a}$

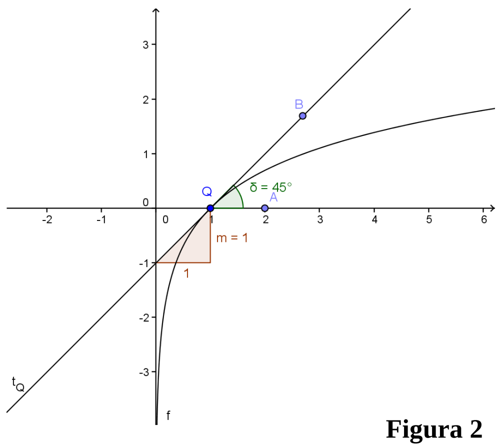


Figura 2

Inclinazione della retta tangente e pendenza sull'asse delle ascisse.

Primo caso:

$$tg\delta=\frac{1}{\log a}=tg45° \rightarrow \log a=1 \rightarrow a=e$$

Secondo caso:

$$tg\delta=\frac{1}{\log a}=tg135° \rightarrow \log a=-1 \rightarrow a=e^{-1}$$

Nelle Figure 2 e 3 sono rappresentati rispettivamente il primo ed il secondo caso.

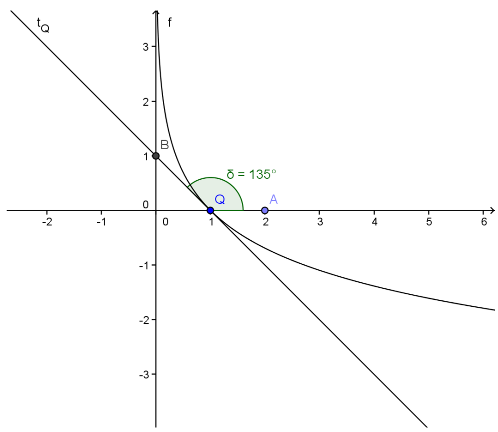


Figura 3

Quesito 3
Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione y=1. Si calcoli l'area di **D.**

Soluzione

In Figura 4 è riportata la funzione e il dominio **D;** questo è composto dall'unione del quadrato OBCD di lato unitario con il triangolo mistilineo ABC.

L'area del quadrato vale 1 (uno). Per determinare l'area del triangolo mistilineo ABC è necessario calcolare il seguente integrale definito

$$\int_1^e (1-\log x)\,dx$$

Per l'integrale indefinito associato, dopo averlo decomposto nella somma di due integrali, per quello avente come funzione integranda la funzione logaritmica si deve procedere con il metodo di integrazione per parti. Si ha:

$$\int (1-\log x)\,dx = \int dx - \int \log x dx =$$

$$x - \left[x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right] = x - x\log x + \int dx =$$

$2x - x\log x + C$, con C costante reale qualsiasi.

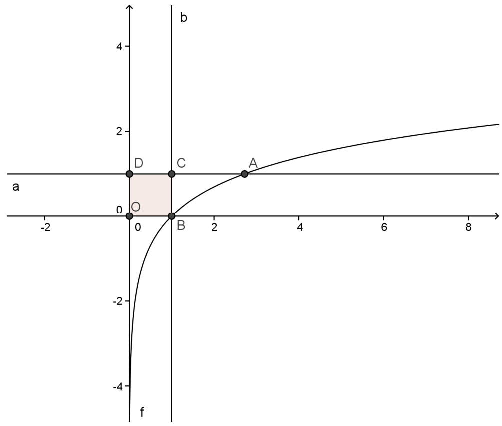


Figura 4

Calcolo dell'integrale definito:

$$\int_1^e (1-\log x)\,dx = \left[2x - x\log x\right]_1^e = e-2$$

Conclusione

L'area del dominio piano **D** è

$$Area(D) = 1 + (e-2) = e-1$$

Per gli utenti di Geogebra

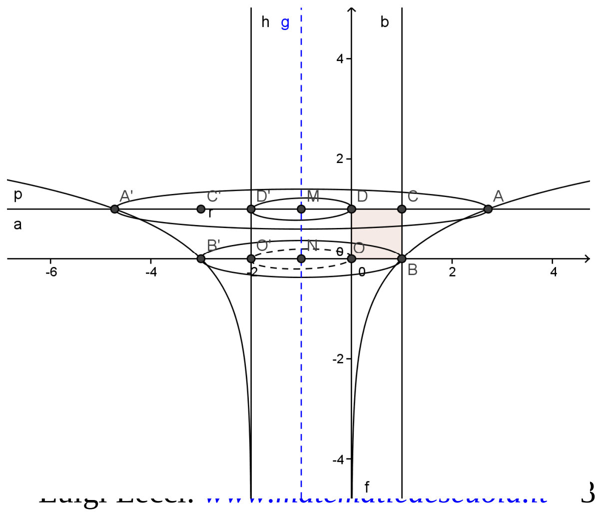
Il valore dell'integrale definito $\int_1^e (1-\log x)\,dx$ si calcola digitando il seguente comando:

integrale[1-ln(x),1,*e*].

Quesito 4
Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione x=-1

Soluzione

Facciamo riferimento alla Figura 5.
Nella figura abbiamo indicato i punti M, N in cui la retta x=-1 incontra la retta di equazione y=1 e l'asse delle ascisse. Osserviamo che il solido di rotazione descritto dal quadrilatero mistilineo OBAD nella rotazione completa in oggetto è dato dalla differenza tra il volume del solido descritto nella rotazione dal quadrilatero mistilineo NBAM ed il volume del cilindro circolare retto descritto nella rotazione dal quadrato NODM.



Il cilindro circolare retto ha raggio di base e altezza che misurano uno e dunque il suo volume $V_1 = \pi r^2 h = \pi$.

Per il volume del solido descritto dal quadrilatero mistilineo NBAM occorre invece un'operazione integrale; è necessario considerare l'equazione dell'arco $\overset{\frown}{BA}$ della curva logaritmica ma, poiché la rotazione avviene intorno ad un asse parallelo all'asse delle ordinate, è necessario scrivere la suddetta equazione esplicitando x rispetto ad y, cioè si deve considerare y come variabile indipendente.

Figura 5

L'equazione cartesiana dell'arco di curva in questione è

$x = e^y$, con $0 \le y \le 1$.

Il generico punto dell'arco $\overset{\frown}{BA}$ ha dall'asse di rotazione distanza $d = 1 + e^y$, per cui, il volume del solido descritto nella rotazione completa dal quadrilatero mistilineo (trapezoide) NBAM è dato dal valore del seguente integrale definito:

$$V_2 = \int_0^1 \pi\left(1+e^y\right)^2 dy = \pi\left[y + 2e^y + \frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{3}{2}\right)$$

Concludiamo che il volume V del solido richiesto è:

$$V = V_2 - V_1 = \pi\left(\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{3}{2}\right) - \pi = \frac{\pi}{2}\left(e^2 + 4e - 5\right)$$