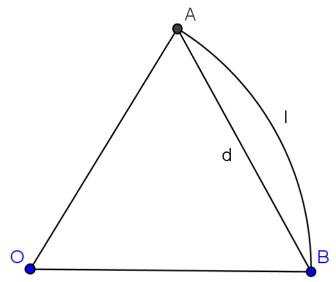
Esame di Stato di Liceo Scientifico
Corso di Ordinamento

Indirizzo: Scientifico
Tema di: Matematica

Problema 1

E' assegnato il settore circolare AOB di raggio *r* e ampiezza *x* (*r* e *x* sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti).

1. Si provi che l'area S compresa tra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di *x*, da $S(x)=\frac{1}{2}r^2(x-\operatorname{sen}x)$ con $x\in[0;2\pi]$.



2. Si studi come varia S(*x*) e se ne disegni il grafico (avendo posto r = 1).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2. Si trovi il valore di **r** per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di *x* in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia *r* = 2 e $x=\frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

Sviluppo dei quesiti

Quesito 1

Si provi che l'area S compresa tra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di *x*, da

$S(x)=\frac{1}{2}r^2(x-\operatorname{sen}x)$ con $x\in[0;2\pi]$.

Soluzione

Indicando con *l* la lunghezza dell'arco AB, con *x*, come indicato nel testo, la misura in radianti dell'angolo del settore, con *r* la misura del raggio della circonferenza cui appartiene il settore, per la diretta proporzionalità tra la lunghezza dell'arco AB della circonferenza e la misura dell'angolo al centro corrispondente sussiste la seguente proporzione:

$l:x=2\pi r:2\pi$, da cui $l=rx$. (1)

Sia S* l'area del settore AOB.

Osserviamo che anche l'area del settore è direttamente proporzionale all'ampiezza *x* dell'angolo al centro per cui possiamo scrivere:

$S^*:x=\pi r^2:2\pi$, da cui $S^*=\frac{1}{2}r^2x$. (2)

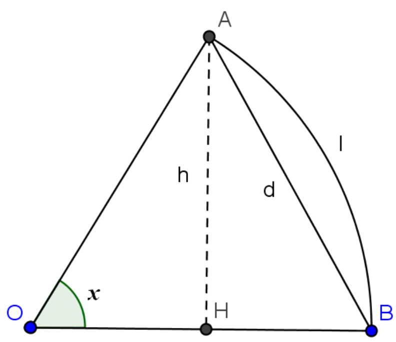


Figura 1

Per determinare l'area del **segmento circolare di base AB** è necessario trovare l'area del triangolo OAB.

Consideriamo il triangolo OAB sulla base OB e sia AH l'altezza relativa. Poiché risulta $\overline{AH}=\overline{OA}\cdot\operatorname{sen}x=r\cdot\operatorname{sen}x$, deduciamo che l'area del triangolo OAB è

$Area(OAB)=\frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}r^2\operatorname{sen}x$.

In conclusione, l'area del segmento circolare in esame è:

$$S(x) = S^* - Area(OAB) = \frac{1}{2}r^2 x - \frac{1}{2}r^2 senx = \frac{1}{2}r^2(x - senx) \qquad \text{C.V.D.}$$

Quesito 2

Si studi come varia S(x) e se ne disegni il grafico (avendo posto r = 1).

Soluzione

La funzione $S(x)$ con r=1 diventa $S(x) = \frac{1}{2}(x - senx)$ che è definita su tutto l'asse reale ma ai fini del problema da cui è stata originata la dobbiamo studiare limitatamente all'intervallo [0;2π].

La funzione è continua ed ammette derivate di qualsiasi ordine in ogni punto e per il teorema di Weierstrass nell'intervallo considerato, che è chiuso e limitato, ammette sia il massimo, sia il minimo.

Zeri e segno

La funzione si annulla solo per x=0; per il resto è positiva. Dimostriamo l'affermazione.
Facendo riferimento alla Figura 1 osserviamo che la misura dell'arco di estremi A, B, se gli estremi sono distinti, è maggiore della corda che lo sottende: $\overline{AB} < \overset{\frown}{AB}$. Ricordato che la misura in radianti dell'angolo al centro di una circonferenza è il rapporto tra la misura dell'arco corrispondente e la misura del raggio, avendo nel caso in esame una circonferenza di raggio unitario (circonferenza goniometrica), la misura x in radianti dell'angolo $B\hat{O}A$ coincide numericamente con la misura dell'arco AB stesso. Ora, dal triangolo rettangolo AHB, con A≠B, si deduce che $\overline{AH} < \overline{AB}$ ed essendo $\overline{AH} = rsenx = senx$, perché r=1, sussiste la disuguaglianza $\overline{AH} < \overline{AB} < \overset{\frown}{AB}$, con x≠0, quindi $senx < \overline{AB} < x$, da cui $x - senx > 0$, cioè $S(x) > 0$. Le considerazioni svolte riferite alla Figura 1, nella quale risulta $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si possono facilmente estendere per ogni x>0.

Monotonia, massimi e minimi relativi.

$S'(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$

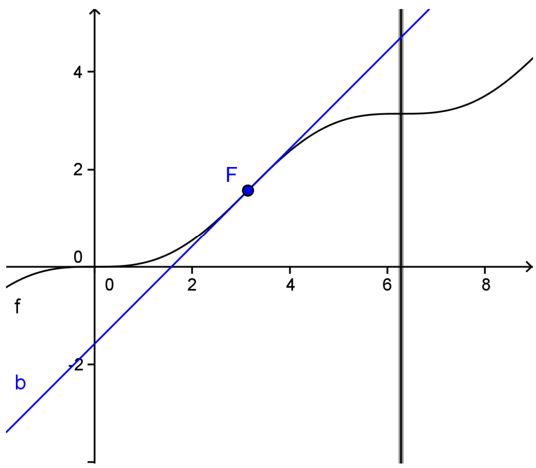
$S'(x) = 0$, solo per (x=0) ∨(x=2π);

$S'(x) > 0$, per ogni $x \in]0;2\pi[\rightarrow$ La funzione è strettamente crescente in ogni punto del dominio, dunque non ha né massimi, né minimi relativi. Il punto x=0 è di minimo assoluto; il punto x=2π è di massimo assoluto con $S(2\pi) = \pi$.

Concavità e flessi

$S''(x) = \frac{1}{2}senx$ La derivata seconda si annulla nei punti x=0, x=π. La funzione è convessa nell'intervallo]0;π[ed è concava in]π;2π[. Il punto x=π è di flesso (discendente) e risulta $S(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Il diagramma della funzione è riportato a lato.



Osservazione

Se si considera la funzione su tutto l'asse reale tutti i punti del tipo $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, sono di flesso; in particolare, quelli della forma $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ sono a tangente obliqua, gli altri sono a tangente orizzontale.

Quesito 3
Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2. Si trovi il valore di **r** per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di *x* in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).

Soluzione

Imponendo che l'area del settore circolare AOB sia 100m^2 si determina l'ampiezza x dell'angolo a centro.

$$\frac{1}{2}r^2x = 100m^2 \rightarrow x = \frac{200}{r^2}rad \qquad (3)$$

La misura del perimetro del settore AOB è

$$Per(AOB) = 2r + l$$

e tenendo presente l'espressione della lunghezza dell'arco AB, l=rx, l'espressione del perimetro in funzione del raggio diventa

$$Per(AOB) = 2r + \frac{200}{r} = f(r) \qquad (4)$$

Ci serviamo del segno della funzione derivata prima per stabilire il valore di r per cui il perimetro risulta minimo.

$f'(r) = 2 - \frac{200}{r^2} = \frac{2(r^2-100)}{r^2}$, da considerare per r>0.

Poiché risulta

$f'(r) < 0$, per $0 < r < 10$,
$f'(r) = 0$, per r=10,
$f'(r) > 0$, per $r > 10$,

la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo]0;10[, è strettamente crescente nell'intervallo]10;+ ∞[e dunque il punto x=10 è di minimo assoluto. Il valore minimo della funzione è

$$\min = f(10) = \left(2 \cdot 10 + \frac{200}{10}\right)m = 40m$$

Valore dell'ampiezza x del settore di perimetro minimo
Il valore dell'ampiezza del settore si ricava ponendo nella (3) r=10m. Si ha

$$x = \frac{200}{10^2}rad = 2rad\,.$$

Poiché nel testo si richiede l'espressione della misura dell'angolo in gradi sessagesimali si deve scrivere

$$x° = \frac{x(rad)\cdot 180°}{\pi(rad)} = \frac{2(rad)\cdot 180°}{\pi(rad)} \approx 114°38'58'',$$

dunque il valore approssimato all'unità gado è 114°.

Quesito 4
Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

Soluzione

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico xOy avente l'origine degli assi O coincidente con il centro della circonferenza di raggio r cui appartiene il settore circolare in questione. In questo riferimento l'equazione cartesiana della circonferenza di raggio r=2 è

$$\lambda : x^2 + y^2 = 4$$

Gli estremi A, B dell'arco del settore, con $x=\frac{\pi}{3}$, hanno coordinate:

$A\left(r\cdot\cos\frac{\pi}{3};r\cdot sen\frac{\pi}{3}\right)\rightarrow A\left(1;\sqrt{3}\right),\;\; B(2;0)$.

Per il calcolo del volume del solido W sono necessarie l'equazione cartesiana del segmento OA e quella dell'arco $\overset{\frown}{BA}$. Risulta:

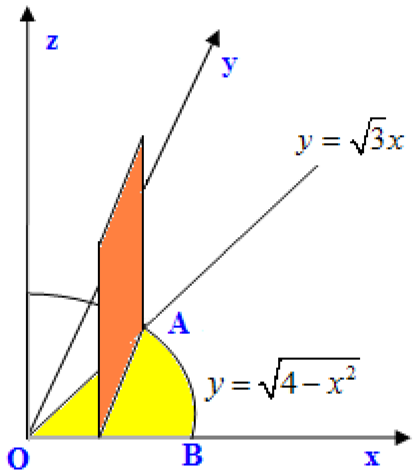
$OA: y=\sqrt{3}x$, con $0\le x\le\frac{1}{2}$;

$\overset{\frown}{AB}: y=\sqrt{4-x^2}$, con $\frac{1}{2}\le x\le 2$.

A questo punto possiamo scrivere l'equazione cartesiana y=φ(x) della curva composta dal segmento OA e dall'arco $\overset{\frown}{AB}$, che sarà sfruttata ne calcolo del volume del solido W. Si ha:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sqrt{3}x & per\quad 0\le x\le\frac{1}{2}\\ \sqrt{4-x^2} & per\quad \frac{1}{2}<x\le 2\end{cases}$$

Tenendo presente la forma geometrica delle sezioni di W con un qualsiasi piano ortogonale all'asse delle ascisse (che sono quadrati), al variare di x nell'intervallo [0;2] l'area di ciascuna sezione misura $(\varphi(x))^2$; possiamo determinare il valore del volume V di W considerando la base di W come l'unione del triangolo OHA, essendo H(1;0), con l'emisegmento circolare HAB. I volumi corrispondenti per le due basi indicate son:



$$V_1=\int_0^1(\varphi(x))^2\,dx=\int_0^1\left(\sqrt{3}x\right)^2\,dx$$

$$=\left[x^3\right]_0^1=1-0=1;$$

$$V_2=\int_1^2(\varphi(x))^2\,dx=$$

$$\int_1^2\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\,dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=$$

$$\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(4-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}.$$

Concludiamo che

$$V=V_1+V_2=1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$$