

Esame di Stato di Liceo Scientifico Corso di Ordinamento

Indirizzo: Scientifico

Tema di: Matematica

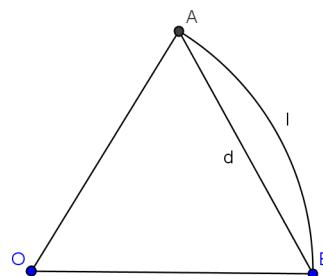
Problema 1

E' assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti).

1. Si provi che l'area S compresa tra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x , da

$$S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \text{sen}x) \quad \text{con } x \in [0; 2\pi].$$

2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2 . Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).



4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un

solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

Sviluppo dei quesiti

Quesito 1

Si provi che l'area S compresa tra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x , da

$$S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \text{sen}x) \quad \text{con } x \in [0; 2\pi].$$

Soluzione

Indicando con l la lunghezza dell'arco AB, con x , come indicato nel testo, la misura in radianti dell'angolo del settore, con r la misura del raggio della circonferenza cui appartiene il settore, per la diretta proporzionalità tra la lunghezza dell'arco AB della circonferenza e la misura dell'angolo al centro corrispondente sussiste la seguente proporzione:

$$l : x = 2\pi r : 2\pi, \quad \text{da cui } l = rx. \quad (1)$$

Sia S^* l'area del settore AOB.

Osserviamo che anche l'area del settore è direttamente proporzionale all'ampiezza x dell'angolo al centro per cui possiamo scrivere:

$$S^* : x = \pi r^2 : 2\pi, \quad \text{da cui } S^* = \frac{1}{2} r^2 x. \quad (2)$$

Per determinare l'area del **segmento circolare di base AB** è necessario trovare l'area del triangolo OAB.

Consideriamo il triangolo OAB sulla base OB e sia AH l'altezza relativa. Poiché risulta $\overline{AH} = \overline{OA} \cdot \text{sen}x = r \cdot \text{sen}x$, deduciamo che l'area del triangolo OAB è

$$\text{Area}(OAB) = \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} r^2 \text{sen}x.$$

In conclusione, l'area del segmento circolare in esame è:

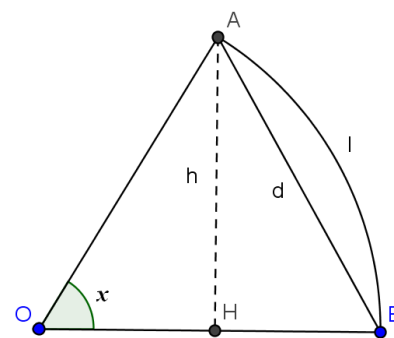


Figura 1

$$S(x) = S^* - \text{Area}(OAB) = \frac{1}{2}r^2x - \frac{1}{2}r^2\text{sen}x = \frac{1}{2}r^2(x - \text{sen}x) \quad \text{C.V.D.}$$

Quesito 2

Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).

Soluzione

La funzione $S(x)$ con $r=1$ diventa $S(x) = \frac{1}{2}(x - \text{sen}x)$ che è definita su tutto l'asse reale ma ai fini del problema da cui è stata originata la dobbiamo studiare limitatamente all'intervallo $[0; 2\pi]$.

La funzione è continua ed ammette derivate di qualsiasi ordine in ogni punto e per il teorema di Weierstrass nell'intervallo considerato, che è chiuso e limitato, ammette sia il massimo, sia il minimo.

Zeri e segno

La funzione si annulla solo per $x=0$; per il resto è positiva. Dimostriamo l'affermazione.

Facendo riferimento alla Figura 1 osserviamo che la misura dell'arco di estremi A, B, se gli estremi sono distinti, è maggiore della corda che lo sottende: $\overline{AB} < \widehat{AB}$. Ricordato che la misura in radianti dell'angolo al centro di una circonferenza è il rapporto tra la misura dell'arco corrispondente e la misura del raggio, avendo nel caso in esame una circonferenza di raggio unitario (circonferenza goniometrica), la misura x in radianti dell'angolo \widehat{BOA} coincide numericamente con la misura dell'arco AB stesso. Ora, dal triangolo rettangolo AHB, con $A \neq B$, si deduce che $\overline{AH} < \overline{AB}$ ed essendo $\overline{AH} = r\text{sen}x = \text{sen}x$, perché $r=1$, sussiste la disuguaglianza $\overline{AH} < \overline{AB} < \widehat{AB}$, con $x \neq 0$, quindi $\text{sen}x < \overline{AB} < x$, da cui $x - \text{sen}x > 0$, cioè $S(x) > 0$. Le

considerazioni svolte riferite alla Figura 1, nella quale risulta $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si possono facilmente estendere per ogni $x > 0$.

Monotonia, massimi e minimi relativi.

$$S'(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$

$$S'(x) = 0, \text{ solo per } (x=0) \vee (x=2\pi);$$

$S'(x) > 0$, per ogni $x \in]0; 2\pi[\rightarrow$ La funzione è strettamente crescente in ogni punto del dominio, dunque non ha né massimi, né minimi relativi. Il punto $x=0$ è di minimo assoluto; il punto $x=2\pi$ è di massimo assoluto con $S(2\pi) = \pi$.

Concavità e flessi

$$S''(x) = \frac{1}{2}\text{sen}x \quad \text{La derivata seconda si annulla nei}$$

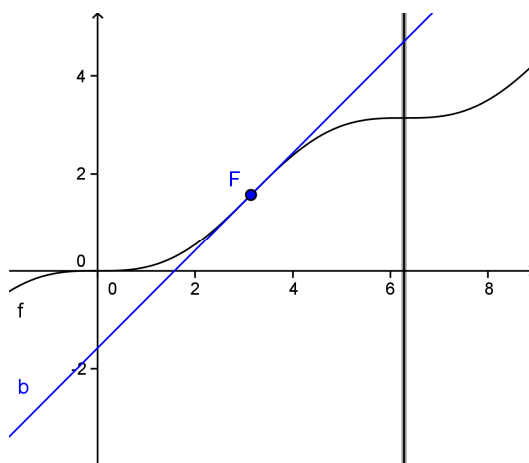
punti $x=0, x=\pi$. La funzione è convessa nell'intervallo $]0; \pi[$ ed è concava in $]\pi; 2\pi[$. Il punto

$x=\pi$ è di flesso (discendente) e risulta $S(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Il diagramma della funzione è riportato a lato.

Osservazione

Se si considera la funzione su tutto l'asse reale tutti i punti del tipo $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, sono di flesso; in particolare, quelli della forma $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ sono a tangente obliqua, gli altri sono a tangente orizzontale.



Quesito 3

Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2 . Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).

Soluzione

Imponendo che l'area del settore circolare AOB sia 100 m^2 si determina l'ampiezza x dell'angolo a centro.

$$\frac{1}{2}r^2x = 100\text{ m}^2 \rightarrow x = \frac{200}{r^2} \text{ rad} \quad (3)$$

La misura del perimetro del settore AOB è

$$\text{Per}(AOB) = 2r + l$$

e tenendo presente l'espressione della lunghezza dell'arco AB, $l=rx$, l'espressione del perimetro in funzione del raggio diventa

$$\text{Per}(AOB) = 2r + \frac{200}{r} = f(r) \quad (4)$$

Ci serviamo del segno della funzione derivata prima per stabilire il valore di r per cui il perimetro risulta minimo.

$$f'(r) = 2 - \frac{200}{r^2} = \frac{2(r^2 - 100)}{r^2}, \text{ da considerare per } r > 0.$$

Poiché risulta

$$f'(r) < 0, \quad \text{per } 0 < r < 10,$$

$$f'(r) = 0, \quad \text{per } r = 10,$$

$$f'(r) > 0, \quad \text{per } r > 10,$$

la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $]0;10[$, è strettamente crescente nell'intervallo $]10;+\infty[$ e dunque il punto $x=10$ è di minimo assoluto. Il valore minimo della funzione è

$$\min = f(10) = \left(2 \cdot 10 + \frac{200}{10} \right) \text{ m} = 40\text{ m}$$

Valore dell'ampiezza x del settore di perimetro minimo

Il valore dell'ampiezza del settore si ricava ponendo nella (3) $r=10\text{ m}$. Si ha

$$x = \frac{200}{10^2} \text{ rad} = 2 \text{ rad}.$$

Poiché nel testo si richiede l'espressione della misura dell'angolo in gradi sessagesimali si deve scrivere

$$x^\circ = \frac{x(\text{rad}) \cdot 180^\circ}{\pi(\text{rad})} = \frac{2(\text{rad}) \cdot 180^\circ}{\pi(\text{rad})} \approx 114^\circ 38' 58'',$$

dunque il valore approssimato all'unità gado è 114° .

Quesito 4

Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W .

Soluzione

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico xOy avente l'origine degli assi O coincidente con il centro della circonferenza di raggio r cui appartiene il settore circolare in questione. In questo riferimento l'equazione cartesiana della circonferenza di raggio $r=2$ è

$$\lambda: x^2 + y^2 = 4$$

Gli estremi A, B dell'arco del settore, con $x = \frac{\pi}{3}$, hanno coordinate:

$$A\left(r \cdot \cos \frac{\pi}{3}; r \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow A(1; \sqrt{3}), \quad B(2; 0).$$

Per il calcolo del volume del solido W sono necessarie l'equazione cartesiana del segmento OA e quella dell'arco \widehat{BA} . Risulta:

$$OA: y = \sqrt{3}x, \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2};$$

$$\widehat{AB}: y = \sqrt{4-x^2}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

A questo punto possiamo scrivere l'equazione cartesiana $y = \varphi(x)$ della curva composta dal segmento OA e dall'arco \widehat{AB} , che sarà sfruttata nel calcolo del volume del solido W. Si ha:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{3}x & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{4-x^2} & \text{per } \frac{1}{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

Tenendo presente la forma geometrica delle sezioni di W con un qualsiasi piano ortogonale all'asse delle ascisse (che sono quadrati), al variare di x nell'intervallo $[0; 2]$ l'area di ciascuna sezione misura $(\varphi(x))^2$; possiamo determinare il valore del volume V di W

considerando la base di W come l'unione del triangolo OHA, essendo H(1;0), con l'emisegmento circolare HAB. I volumi corrispondenti per le due basi indicate son:

$$V_1 = \int_0^1 (\varphi(x))^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{3}x)^2 dx$$

$$= [x^3]_0^1 = 1 - 0 = 1;$$

$$V_2 = \int_1^2 (\varphi(x))^2 dx =$$

$$\int_1^2 (\sqrt{4-x^2})^2 dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 =$$

$$\left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(4 - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3}.$$

Concludiamo che

$$V = V_1 + V_2 = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$$

