Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE
Indirizzo : PIANO NAZIONALE INFORMATICA
Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO: Q8

8. Sia *f* la funzione definita da $f(x)=\pi^x-x^\pi$. Si precisi il dominio di *f* e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x=\pi$

Soluzione

La funzione in esame è ottenuta dalla differenza tra la funzione esponenziale π^x , definita su tutto l'asse reale, e la funzione potenza x^π , definita nell'intervallo $[0;+\infty[$; pernotto la funzione f(x) è definita nell'intervallo $[0;+\infty[$.

Calcolo delle derivate prima e seconda

$$f(x)=\pi^x-x^\pi \rightarrow \qquad f'(x)=\pi^x\cdot\log\pi-\pi\cdot x^{\pi-1}, \qquad f''(x)=\pi^x\cdot(\log\pi)^2-\pi(\pi-1)\cdot x^{\pi-2}$$

Valori richiesti

$$f'(\pi)=\pi^\pi\cdot\log\pi-\pi\cdot\pi^{\pi-1}=\pi^\pi(\log\pi-1)$$

Ricordiamo che la funzione $\log_a x$, con a>1, è strettamente crescente e che $\log_a a=1$. Ciò premesso, poiché

$$\log e=1 \text{ e } \pi>e \Rightarrow \log\pi>\log e \rightarrow \log\pi-1>0$$

per cui risulta $f'(\pi)>0$.

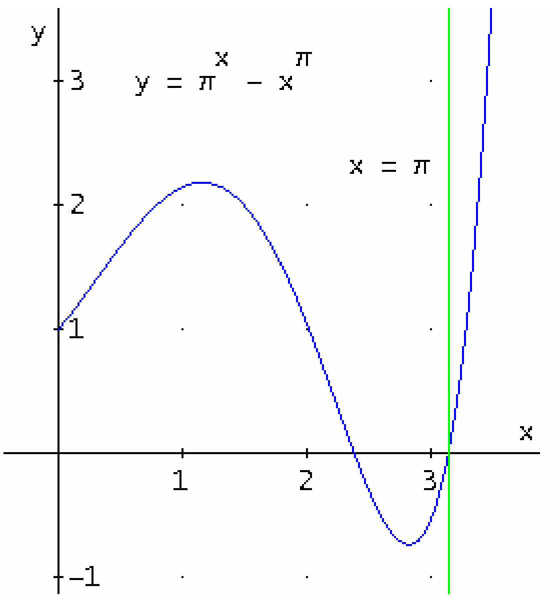
$$f''(\pi)=\pi^\pi\cdot(\log\pi)^2-\pi(\pi-1)\cdot\pi^{\pi-2}=$$

$$\pi^\pi\cdot(\log\pi)^2-\pi^\pi+\pi^{\pi-1}=\pi^\pi\cdot\left((\log\pi)^2-1\right)+\pi^{\pi-1}.$$

Si ha anche

$$(\log\pi)^2=\log\pi\cdot\log\pi>\log\pi>1\rightarrow(\log\pi)^2-1$$

Concludiamo che $f''(\pi)>0$.



Osservazione

A lato è rappresentato parzialmente il diagramma della funzione in esame. Il punto $x=\pi$ è quello in cui il diagramma taglia l'asse delle ascisse. La positività dei valori $f'(\pi)$, $f''(\pi)$ indica che la funzione nel punto è strettamente crescente e che la concavità è rivolta verso l'alto (la funzione è convessa).