Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE
Indirizzo : PIANO NAZIONALE INFORMATICA
Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO: Q1, Q2

1. Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

Soluzione

Strategia risolutiva

La **probabilità** che un punto P scelto a caso all'interno del cono sia esterno alla sfera inscritta nel cono è data dal **rapporto tra il volume del cono esterno alla sfera** ed il **volume di tutto il cono**. E' necessario dunque determinare il volume del cono e quello della sfera inscritta.

Per risolvere il problema non è necessario conoscere le misure effettive delle dimensioni dei solidi in gioco. Per questo motivo indicheremo con R la misura del raggio del cerchio di base del cono ed esprimeremo tramite questo parametro i volumi dei solidi che utilizzeremo.

Risoluzione del quesito.

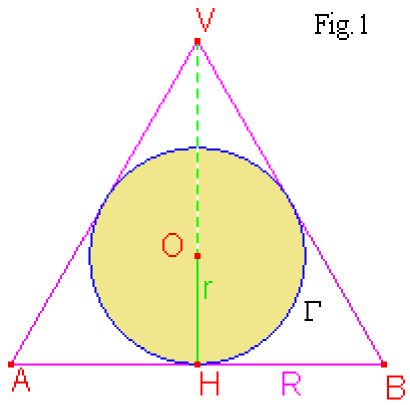


Fig. 1

Per definizione un cono circolare retto è equilatero se il suo apotema ha la stessa misura del diametro della base del cono. Sezionando un tale cono con un piano passante per l'asse di simmetria dello stesso, che è la retta dell'altezza, si ottiene un triangolo equilatero. Indichiamo con R la misura del raggio della base del cono e immaginiamo di considerare una sezione del cono con un piano perpendicolare alla base che contenga la retta dell'altezza. Questo piano taglia la sfera inscritta nel cono lungo una circonferenza Γ ed il cono nel triangolo VAB, essendo V il vertice del cono. Sia O il centro di Γ. Dalle proprietà del triangolo equilatero, sappiamo che il punto O coincide anche con il baricentro del triangolo VAB, dunque la sua distanza dalla base AB, che rappresenta la misura del raggio della circonferenza Γ, è pari ad un terzo dell'altezza VH del triangolo (vedi figura). Poiché si ha

$$\overline{VH} = \overline{AB} \cdot \sqrt{3}/2 = R \cdot \sqrt{3} \rightarrow r = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Indichiamo con V_1 il volume del cono e con V_2 quello della sfera. Risulta:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \overline{VH} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3; \quad V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi R^3$$

Per quanto premesso prima il valore della probabilità richiesta è

$$p = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = 1 - \frac{V_2}{V_1} = 1 - \frac{\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi R^3}{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3} = 1 - \frac{4 \cdot 3}{27} = \frac{5}{9}$$

Quesito n.2

2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $sen\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Osservazioni

a) Nella Sessione Ordinaria dell'Esame di Stato di Liceo Scientifico, Indirizzo PNI, del 23-06-2005 è stato assegnato lo stesso quesito. Riportiamo di seguito la soluzione presentata allora.

b) In questo caso lo studente non deve dimostrare preliminarmente che il lato del decagono regolare rappresenta la sezione aurea del raggio della circonferenza in cui è inscritto il decagono, ma sfruttare questa proprietà per calcolare il sen(π/10).

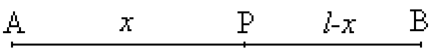
Testo del quesito del 2005

Q1*- Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è la sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare sen18°, sen36°.*

Facciamo notare che π/10 è la misura in radianti dell'angolo di 18°.

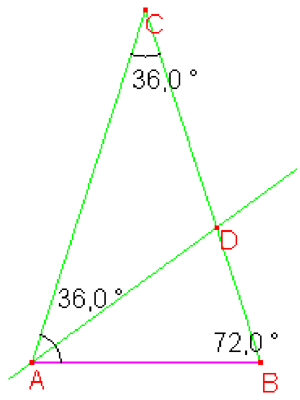
Soluzione

Ricordiamo che la sezione aurea di un segmento, per definizione, è la parte del segmento che risulta media proporzionale tra l'intero segmento e la parte dell' stesso che rimane sottraendo al segmento la sua parte aurea.
Nella figura a lato è indicato il segmento AB ed è indicato il punto P interno ad esso. Posto $\overline{AB}=l$, $\overline{AP}=x$, affinché il segmento AP sia la parte aurea del segmento AB la misura *x* (positiva) deve verificare la seguente proporzione

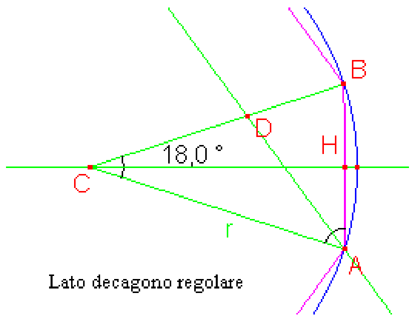


$$l:x=x:(l-x)\Rightarrow\ x^2+lx-l^2=0\Rightarrow\ x=\frac{l\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}.$$

Osserviamo che $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\simeq 0,618$, quindi la sezione aurea di un segmento rappresenta quasi il 62% del segmento.



Il quesito chiede di dimostrare che il lato del decagono regolare è uguale alla sezione aurea del raggio della circonferenza in cui è inscritto. Per dimostrare l'affermazione si deve considerare un triangolo isoscele avente l'angolo al vertice di 36° (e conseguentemente i due angoli alla base di misura 72°) e far vedere che la base del triangolo rappresenta la sezione aurea del lato.
In riferimento al triangolo isoscele rappresentato a lato con le caratteristiche indicate, si osservi che tracciando al bisettrice AD dell'angolo alla base nel vertice A, il triangolo ABD è isoscele e simile al triangolo ABC; anche il triangolo ADC è isoscele con AD=CD. Sussiste la seguente proporzione
BC:AB=AD:BD
dalla quale emerge che si può anche scrivere
BC:CD=CD:BD
Ma evidentemente BD=BC-CD e quindi CD è la sezione aurea di BC; poiché CD=AB la tesi è acquisita.
A questo punto si può tornare al decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio r.
Notiamo che unendo due vertici consecutivi con il centro della circonferenza si ottiene un triangolo isoscele con l'angolo nel centro C della circonferenza che misura 36° (un decimo dell'angolo giro) e dunque per la dimostrazione precedente la misura del lato del decagono (base del triangolo) rappresenta la sezione aurea del raggio. Indicando con l_{10} la misura del lato del decagono regolare, e con r la misura del raggio possiamo porre



$$l_{10}=\frac{r\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

D’altra parte, considerando la bisettrice CH dell’angolo al vertice C, l’angolo BCH misura 18° e dal triangolo rettangolo CHB possiamo scrivere

$$sen(BCH)=\frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow sen(18°)=\frac{l_{10}/2}{r}=\frac{r\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{4\cdot r}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}$$