Esame di Stato di Liceo Scientifico

Sessione Ordinaria 2008

Corso Sperimentale

Indirizzo: Piano Nazionale Informatica

Tema di Matematica

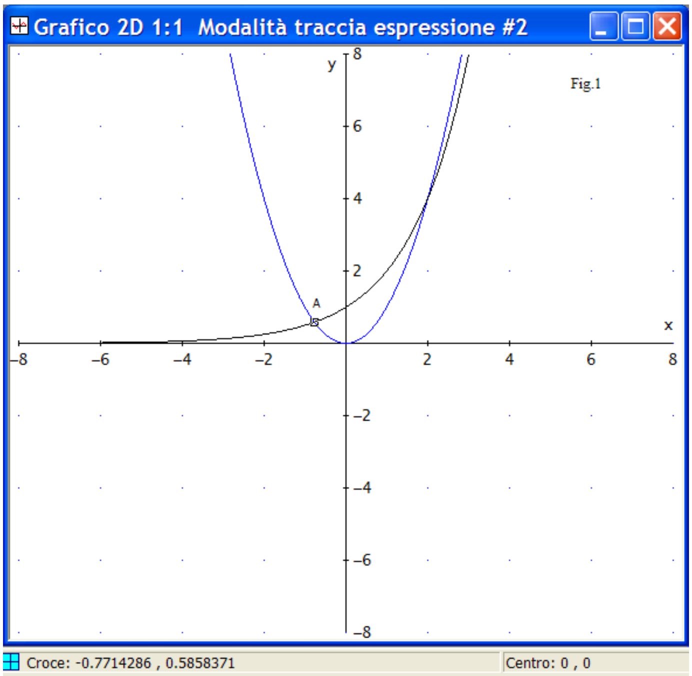
Problema 2

Siano f e g le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x)=2^x$ e $g(x)=x^2$.

1. Si traccino i grafici di f e di g e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.
2. Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.
3. Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x)= 2^x -x^2$? Si tracci il grafico di h.
4. Si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di h e l'asse x sull'intervallo [2;4].

Soluzione

1. Le funzioni in esame sono due funzioni elementari; f è una funzione esponenziale, g è la funzione quadratica. I loro grafici sono riportati in Fig.1.



2. Sfruttando l'opzione in **Modalità traccia** nell'elaborazione grafica ottenuta con Derive6, riportata in Fig.1, si ricava che l'ascissa del punto A di intersezione in questione è x_A=-0,7714286 e dunque il valore richiesto nel quesito è x_A=-0.77. Questa indicazione non risponde, tuttavia, al quesito posto in quanto occorre indicare un metodo di approssimazione numerica per determinare il valore dell'ascissa di A. Affrontiamo dunque il problema applicando **il metodo di bisezione**. Notiamo che per $f(-1)=0{,}5$, $g(-1)=1$, quindi $f(-1)<g(-1)$, mentre $f(0)=1$ e $g(0)=0$, quindi $f(0)>g(0)$. La funzione $h(x)=f(x)-g(x)$, di cui ci si occuperà più in dettaglio nel successivo punto, è continua e limitatamente all'intervallo [-1;0] assume valori di segno discorde agli estremi, dunque, per il **teorema di esistenza degli zeri**, internamente all'intervallo suddetto ammette almeno uno zero. L'andamento dei grafici delle due funzioni suggerisce anche che lo zero sarà unico; questa è un'intuizione, ma l'affermazione andrebbe dimostrata rigorosamente. Occupiamoci della ricerca dello zero.
   Il metodo di bisezione permette di ottenere velocemente delle approssimazioni dello zero $x=\alpha$. Sappiamo già che il valore è compreso tra -1 e zero. Si assume come primo valore approssimato x_1=-0,5, punto medio dell'intervallo [-1;0], e si calcolano i due valori $f(x_1)$, $g(x_1)$ e li si confronta. Se $f(x_1)> g(x_1)$ allora α sarà compreso tra -1 ed x_1, mentre se $f(x_1)< g(x_1)$ allora α sarà compreso tra x_1 e zero; il passo successivo consiste nello scegliere come secondo valore approssimato di α il punto medio del nuovo intervallo che contiene lo zero; si procede con l'indagine finché non si raggiunge la precisione richiesta.
   Come controllare la precisione?

Osserviamo che indicata con l l'ampiezza del primo intervallo contenente o zero (per noi l=1), dopo aver iterato il processo n volte, l'ampiezza dell'intervallo che conterrà lo zero sarà $l_n = \frac{l}{2^n}$, per cui, assumendo per il valore dello zero quello del punto medio dell'intervallo, l'errore commesso $err.$ verificherà la doppia disuguaglianza $0 < err. < \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2^n}$; non appena risulterà $\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2^n} < \frac{1}{100}$ il processo di ricerca avrà termine. Dunque, possiamo prevedere che non appena risulterà $2^{n+1} > 100$, cioè con n=6 passaggi, si sarà trovato il valore approssimato richiesto.

Riportiamo di seguito delle elaborazioni eseguite con il foglio elettronico Excel dalle quali emerge che lo zero richiesto è α=-0,7734375.

Osservazione- Il valore trovato differisce di poco da quello visualizzato con Derive6. In ogni caso, la risposta da dare per il quesito è x=-0,77.

Ricerca del valore approssimato di α con il metodo di bisezione					
		$f(x) = 2^x - x^2$			
	a=-1	b=0	$\alpha = x_m$		
n	x_1	x_2	$x_m=(x_1+x_2)/2$	$f(x_m)$	$l=x_2-x_1$
0	-1,0000000	0,0000000	-0,5000000	0,457107	1,0000000
1	-1,0000000	-0,5000000	-0,7500000	0,032104	0,5000000
2	-1,0000000	-0,7500000	-0,8750000	-0,220371	0,2500000
3	-0,8750000	-0,7500000	-0,8125000	-0,090762	0,1250000
4	-0,8125000	-0,7500000	-0,7812500	-0,028489	0,0625000
5	-0,7812500	-0,7500000	-0,7656250	0,002017	0,0312500
6	-0,7812500	-0,7656250	-0,7734375	-0,013184	0,0156250
7	-0,7734375	-0,7656250	-0,7695313	-0,005570	0,0078125
8	-0,7695313	-0,7656250	-0,7675781	-0,001773	0,0039063
9	-0,7675781	-0,7656250	-0,7666016	0,000123	0,0019531
10	-0,7675781	-0,7666016	-0,7670898	-0,000825	0,0009766
11	-0,7670898	-0,7666016	-0,7668457	-0,000351	0,0004883
12	-0,7668457	-0,7666016	-0,7667236	-0,000114	0,0002441
13	-0,7667236	-0,7666016	-0,7666626	0,000004	0,0001221
14	-0,7667236	-0,7666626	-0,7666931	-0,000055	0,0000610
15	-0,7666931	-0,7666626	-0,7666779	-0,000026	0,0000305
16	-0,7666779	-0,7666626	-0,7666702	-0,000011	0,0000153
17	-0,7666702	-0,7666626	-0,7666664	-0,000003	0,0000076
18	-0,7666664	-0,7666626	-0,7666645	0,000000	0,0000038
19	-0,7666664	-0,7666645	-0,7666655	-0,000001	0,0000019
20	-0,7666655	-0,7666645	-0,7666650	-0,000001	0,0000010

3. Gli zeri della funzione h(x) sono tre. Due sono evidenti in Fig.1, ma questa riporta solo parzialmente i diagrammi delle due funzioni.

   Possiamo osservare che x_2=2 e x_3=4 sono altri due zeri della funzione, oltre allo zero x=α determinato in precedenza. Dedurremo tra breve, con lo studio del diagramma della funzione, che non ci sono altri zeri.

   Per il diagramma della funzione h(x) è importante lo studio del segno della funzione e quello dei limiti per x→-∞ e x→+∞.

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x - x^2 = 0 - \infty = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} 2^x - x^2 = \lim_{x\to+\infty} 2^x\left(1-\frac{x^2}{2^x}\right) =$$

$$+\infty\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{2^x}\right) = +\infty\cdot\left(1-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2^x}\right) = \qquad +\infty\cdot(1-0) = +\infty$$

I valori ottenuti per i limiti suggeriscono che il diagramma della funzione non ammette asintoti orizzontali per x→-∞ e x→+ ∞. Possiamo però provare che non esistono neanche asintoti obliqui studiando i limiti

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2^x}{x}-\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{x} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \frac{2^{-\infty}}{-\infty} - \lim_{x\to-\infty} x = 0-(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-x^2}{x} \overset{H.}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\log 2 - 2x}{1} = \ldots = +\infty(+\infty-2) = +\infty \qquad \text{C.V.D.}$$

Monotonia, massimi, minimi relativi.

$h'(x) = 2^x.\log 2 - 2x$

Si devono studiare il segno e gli zeri della derivata prima.

$h'(x) = 2^x.\log 2 - 2x \geq 0 \to 2^x.\log 2 \geq 2x$

Si esegue il confronto grafico tra le curve

$\gamma_1 : y = 2^{x-1}$, $\gamma_2 : y = \dfrac{x}{\log 2}$

e si riscontra che si tagliano in due punti aventi ascisse $x_1 = 0,48$, $x_2 = 3,25$ (Fig.2). Dal confronto grafico si evince che la funzione derivata prima sarà positiva nell'intervallo]-∞;x_1[e nell'intervallo]x_2;+∞ [, quindi in ciascuno di essi la funzione h(*x*) è strettamente crescente. La derivata prima è invece negativa nell'intervallo]x_1;x_2[e dunque in esso la funzione h(*x*) è strettamente decrescente. Concludiamo che il punto x_1 è di massimo relativo proprio, con $h(x_1)\approx 1,16$ ed il punto x_2 è di minimo relativo proprio, con $h(x_2)\approx -1,05$.

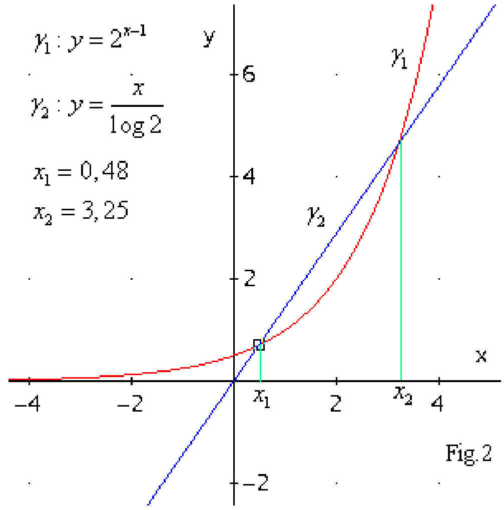


Fig. 2

Si noti che la stretta decrescenza nell'intervallo]x_1;x_2[, unita alla proprietà di continuità della funzione ed ai valori $h(x_1)>0$, $h(x_2)<0$, implicano che internamente all'intervallo]x_1;x_2[la funzione si annullerà una sola volta. Analoghe considerazioni permettono di affermare che la funzione si annullerà una sola volta nell'intervallo]-∞;x_1[, ed una sola volta ancora nell'intervallo] x_2;+∞[. Pertanto **la funzione ammette tre soli zeri**.

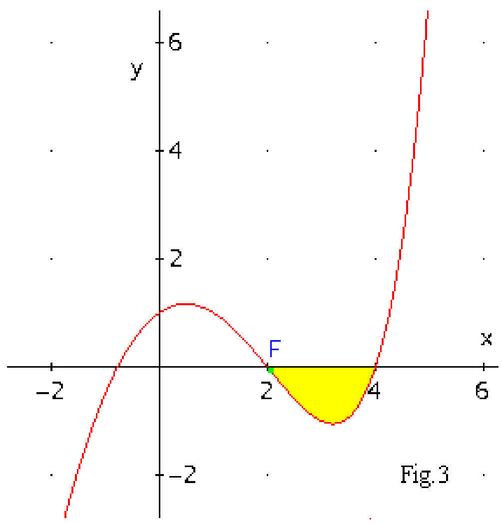


Fig. 3

Concavità e flessi.

La derivata seconda della funzione è

$h''(x) = 2^x(\log 2)^2 - 2$

$$2^x(\log 2)^2 - 2 \geq 0 \to 2^x \geq \frac{2}{(\log 2)^2} \to x \geq \log_2 4,16,$$

essendo $\log_2 4{,}16 \approx 2{,}06$.

La concavità del diagramma è rivolta verso il basso per $x < \log_2 4{,}16$, verso l'alto per $x > \log_2 4{,}16$; il punto di ascissa $x = \log_2 4{,}16$ è di flesso ascendente.

Il diagramma della funzione y=*h*(*x*) è riportato in Fig.3

Concludiamo affermando che la funzione è positiva nell'insieme $]\alpha;2[\cup]4;+\infty[$, è negativa nell'insieme $]-\infty;\alpha[\cup]2;4[$.

4. Poiché nell'intervallo considerato la funzione *h*(*x*) è negativa, annullandosi agli estremi, il valore dell'area della regione piana delimitata dal diagramma della curva e dall'asse delle ascisse si ottiene con l'integrale definito della funzione opposta. Si ha:

$$Area = \int_2^4 -h(x)dx = \int_2^4 \left(x^2 - 2^x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2^x}{\log 2}\right]_2^4 = \left(\frac{64}{3} - \frac{16}{\log 2}\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{\log 2}\right) =$$

$$\frac{56}{3} - \frac{12}{\log 2} \approx 1{,}354$$