Quesito_9 (derivabilità ed integrazione indefinita)

9 Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e,ancora, che $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

Soluzione

Se esprimiamo la funzione con la sua equazione cartesiana $y = f(x)$, il problema posto si può formalizzare con il seguente sistema

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un classico problema di Cauchy del primo ordine la cui soluzione è immediata. Infatti possiamo scrivere

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

ed integrando i due membri otteniamo

$\int \frac{dy}{y} = \int dx \Leftrightarrow \log|y| = x + c$, con c costante reale.

L'equazione può essere scritta esplicitando y rispetto ad x.

$|y| = e^{x+c} \Rightarrow y = ke^{x}$, con $k \in \mathbb{R}_0$

L'equazione ottenuta, al variare del parametro reale k, con $k \neq 0$, descrive tutte le funzioni reali di variabile reale la cui derivata prima coincide con la funzione stessa. Tra queste ne esiste solo una che verifica la "condizione al contorno" assegnata $y(0) = 1$ che si determina trovando il corrispondente valore di k.

$$y(0) = ke^{0} = 1 \Rightarrow k = 1$$

La funzione richiesta è dunque la funzione esponenziale $f(x) = e^{x}$.