PROBLEMA 1
Un filo metallico di lunghezza *l* viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima ?
c) la somma delle due aree sia massima?

Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Soluzione

a) Sia ABCD il rettangolo rappresentativo dell'aiuola. Posto $\overline{AB} = x \Rightarrow \overline{BC} = \frac{l}{2} - x$, con $0 \le x \le \frac{l}{2}$. Si tratta di stabilire per quale valore della variabile *x* l'area del rettangolo ABCD è massima. Il valore dell'area è

$S(x) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = x\left(\frac{l}{2} - x\right)$. Occorre determinare il massimo di questa funzione con la variabile *x* appartenente all'intervallo $\left[0; \frac{l}{2}\right]$.

Si tratta di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, dunque ammette massimo e minimo assoluti (teorema di Weierstrass). Per la determinazione del valore massimo si studia il segno della derivata prima.

$S'(x) = \frac{l}{2} - 2x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{l}{4}$

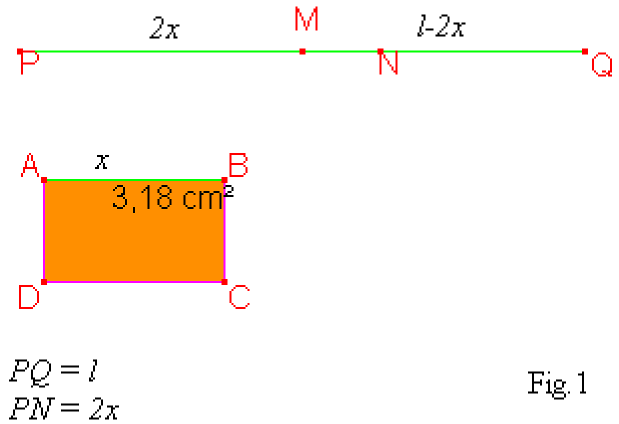

Fig. 1

Apri la figura con Cabrì per osservare la dinamica che conduce al rettangolo di area massima.

Dunque

per $0 \le x < \frac{l}{4}$ la derivata prima è positiva e perciò la funzione è strettamente crescente;

per $\frac{l}{4} < x \le \frac{l}{2}$ la derivata prima è negativa e perciò la funzione è strettamente decrescente.

Da quanto precede si conclude che $x = \frac{l}{4}$ è punto di massimo relativo, ma anche assoluto per la funzione ed il valore del massimo è

$$Max = S\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l^2}{16}$$

Osservazione

Con $\overline{AB} = x = \frac{l}{4} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{l}{4}$ e dunque il rettangolo ABCD diventa un quadrato. Questa considerazione permette di concludere che **fra i rettangoli isoperimetrici quello di area massima è il quadrato**.

Soluzione dei quesiti b), c)

b) la somma delle due aree sia minima ?

c) la somma delle due aree sia massima?

Sul segmento PQ immaginiamo di fissare il punto N in modo che il segmento PN rappresenti il perimetro della prima aiuola (quadrata) ed il segmento NQ la circonferenza rettificata della seconda aiuola che si intendono delimitare con il filo di lunghezza *l*.

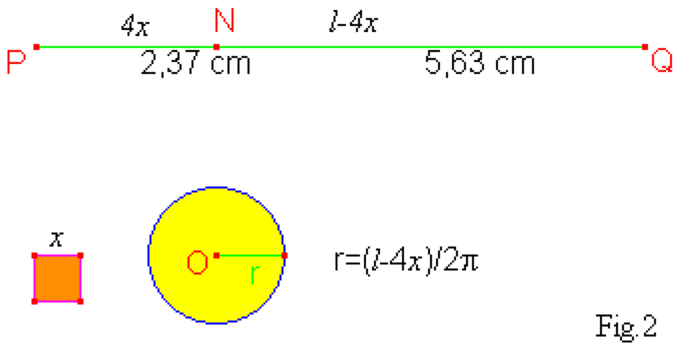

Fig.2

Ponendo $\overline{PN} = 4x \;\Rightarrow 0 \le x \le \frac{l}{4}$

e per la misura del raggio dell'aiuola circolare delimitata con la parte restante di filo risulta $r = \frac{l-4x}{2\pi}$. La somma delle aree delle due aiuole è dunque

$$S_2(x) = x^2 + \pi\left(\frac{l-4x}{2\pi}\right)^2 = x^2 + \frac{(l-4x)^2}{4\pi}$$

Per rispondere ai due quesiti, b), c) basta determinare per quali valori della variabile *x* la funzione assume il suo minimo (quesito b)) e per quale valore assume il suo massimo (quesito c)).

La funzione $S_2(x)$ è razionale intera con dominio $\left[0;\frac{l}{4}\right]$; è dotata di massimo e di minimo assoluti per il teorema di Weierstrass. Ponendo la funzione nella forma $S_2(x) = \left(1+\frac{4}{\pi}\right)x^2 - \frac{2l}{\pi}x + \frac{l^2}{4\pi}$, per la derivata prima si ha $S'_2(x) = 2\left(1+\frac{4}{\pi}\right)x - \frac{2l}{\pi}$ e quindi

$$S'_2(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{l}{\pi+4}.$$

Osserviamo che il punto $x = \frac{l}{\pi+4}$ è interno al dominio e dunque in esso la funzione assume il valore minimo assoluto:

$$\min = S_2\left(\frac{l}{\pi+4}\right) = \frac{l^2}{4(\pi+4)}$$

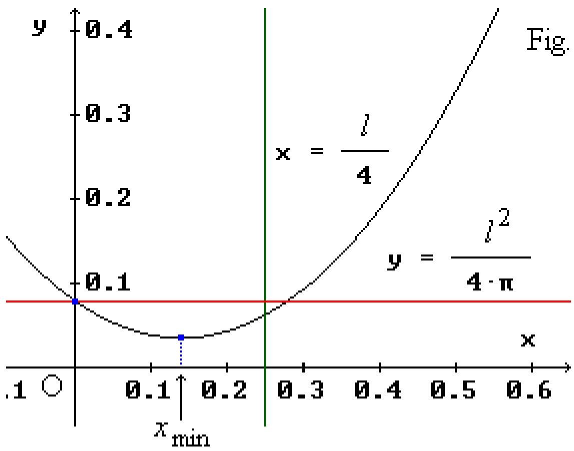

Fig.3

Per quanto riguarda il valore massimo è necessario calcolare i valori assunti dalla funzione agli estremi del dominio. Poiché risulta

$$S_2(0) = \frac{l^2}{4\pi}, \quad S_2\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l^2}{4(\pi+4)},$$

ed evidentemente $\frac{l^2}{4\pi} > \frac{l^2}{4(\pi+4)}$, concludiamo che il valore massimo per la somma delle due aree si ottiene per *x*=0, cioè se l'aiuola quadrata non viene

realizzata e si destina tutto il filo per la realizzazione dell'aiuola circolare.
In Fig.3 è riportato il diagramma della funzione $y = S_2(x)$. Si tratta di un arco di parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e concavità rivolta verso l'alto. La parte da considerare è solo quella relativa ai valori delle ascisse $0 \le x \le \frac{l}{4}$. Nella figura sono indicati il punto del grafico la cui ordinata rappresenta il valore massimo ed il punto (vertice della parabola) la cui ordinata rappresenta il valore minimo richiesto.

Ultimo quesito

Siano *a*,*b*,*c* le tre dimensioni dell'aiuola a forma di parallelepipedo rettangolo. La quantità di terreno contenuto è $V = abc$. Se si aumenta ciascuna dimensione del 10% le nuove dimensioni del parallelepipedo saranno

$$a' = a + \frac{1}{10}a = \frac{11}{10}a, \quad b' = \frac{11}{10}b, \qquad c' = \frac{11}{10}c$$

e quindi la quantità di terreno necessaria per colmare l'aiuola è

$$V' = a'b'c' = \left(\frac{11}{10}\right)^3 abc = \left(\frac{11}{10}\right)^3 V.$$

Si richiede di determinare cosa rappresenta percentualmente la quantità di terreno in più necessaria per la nuova aiuola rispetto alla quantità della prima. In simboli si deve determinare il seguente rapporto

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \frac{\left[\left(\frac{11}{10}\right)^3 - 1\right]V}{V} = \frac{331}{1000} = 33{,}1\%$$

Per la nuova aiuola occorre circa 1/3 in più del terreno necessario per la prima.

Commento al quesito

Il primo quesito posto è un problema classico. Dati due numeri reali x, y la cui somma sia costante si verifica che il loro prodotto è massimo quando i due numeri sono uguali. La risoluzione del quesito può essere affrontata in diversi modi.

Algebricamente con l'aiuto della geometria analitica

Con $x+y=k$, k costante, alla funzione algebrica rappresentante il prodotto $p=xy=x(k-x)=kx-x^2$ corrisponde nel piano cartesiano *xOp* una parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, passante per l'origine degli assi e che taglia l'asse delle ascisse nell'ulteriore punto $x=k$. Di questa parabola, ai fini del problema posto, si deve considerare solo l'arco i cui punti hanno ascissa $0 \le x \le k$; il vertice della parabola è quello che ha ordinata maggiore e la sua ascissa è $x=k/2$, dunque per questo valore della variabile il prodotto è massimo. D'altra parte $x=k/2 \Rightarrow y=k/2$ e quindi il prodotto è massimo quando x ed y sono uguali.

Con gli strumenti dell'analisi matematica

E' il metodo seguito nella risoluzione proposta. Quindi determinando il massimo di una funzione razionale intera di secondo grado definita in un intervallo chiuso e limitato.

Con gli strumenti della geometria piana elementare

Osservando che il perimetro del rettangolo dell'aiuola rimane costantemente uguale alla misura *l* del filo e dunque che tutti i rettangoli che si possono disegnare sono isoperimetrici. Dalla geometria elementare è noto che tra tutti i rettangoli isoperimetrici quello di area massima è proprio il quadrato e dunque questa è la forma da dare all'aiuola per il raggiungimento dell'obiettivo.

Nella risoluzione riportata sopra si è scelto il metodo dell'analisi matematica onde offrire l'opportunità di richiamare alcuni concetti propri dell'analisi matematica, parte del programma del quinto anno di Liceo Scientifico.

Anche l'ultima parte del problema è di facile soluzione. Ritengo interessante, anche se non presenta alcuna difficoltà, la richiesta sulla determinazione dell'incremento percentuale di terreno. Si tratta dell'applicazione di un concetto matematico ricorrente in problemi di fisica e per questo gli studenti che hanno seguito un corso applicativo di fisica, qual è quel dell'indirizzo PNI, non dovrebbero aver incontrato ostacoli nella risoluzione.