Esame di Stato di Liceo Scientifico – a.s. 2004-2005

Corso PNI e di Ordinamento - Sessione Ordinaria – 23 giugno 2005

Problema 2

Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo [0;+∞[da:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1 \qquad , \text{ se } x>0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale monometrico.

1. Si stabilisca se *f* è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo [0;+∞[, un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta *r* tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia *n* un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di *n*, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente *r* e dalle due rette: $x=\frac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Soluzione

1. La funzione assegnata è definita nell'intervallo [0;+∞[. Per $x>0$ è continua e derivabile perché, esprimendola nella forma

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-x^2\log x+1, \qquad (2.1)$$

si riconosce essere la somma di funzioni continue e derivabili nell'intervallo]0;+∞[. Per stabilire se è continua e derivabile anche nel punto $x = 0$ è necessario studiare due limiti. Faremo vedere che è continua e derivabile anche nel punto in questione.

Riconoscimento della continuità.

Ricordiamo che sussiste la seguente

Definizione

Una funzione f definita in un punto x_o che sia di accumulazione per il dominio è continua nel punto x_o se e solo se esiste il limite della funzione per $x \to x_o$ e risulta

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=f(x_o) \qquad (2.2)$$

Si tratta dunque di studiare il limite indicato nel caso in esame con $x_o=0$. A tal proposito, facendo riferimento alla forma analitica (2.1) della funzione, si ha

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}x^2+1\right)=1;$$

per quanto concerne l'altro termine $\left(-x^2\log x\right)$ ricordiamo che sussiste il limite notevole

$$\lim_{x\to 0^+} x^r\log x=0,\ \forall r\in R^+ \qquad (2.3)$$

e dunque risulta anche $\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2\log x\right)=0$.

In virtù del teorema sul limite della somma di due funzioni possiamo concludere che

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{2}x^2-x^2\log x+1\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{2}x^2+1\right)+\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2\log x\right)=1+0=1=f(0)$$

Dunque la funzione è continua anche nel punto $x=0$.

Studio della derivabilità nel punto $x=0$

Ricordiamo la definizione di derivabilità in un punto x_o di accumulazione per il dominio della funzione.

Considerata una funzione $f: A \to R$, con $A \subseteq R$, e detto x_o un punto del dominio e di accumulazione per lo stesso, si dice che la funzione è derivabile in detto punto se e solo se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

ed il suo valore è finito.

Il rapporto $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ è detto rapporto incrementale.

Applicando la definizione impostiamo e studiamo il suddetto limite con $x_o = 0$.

Tenendo presente l'espressione analitica della funzione e che $f(0)=1$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 - x^2 \log x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}\left(\frac{3}{2} - \log x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2}x - \lim_{x\to 0}\left(x \log x\right)$$

Tenendo ancora presente il limite notevole (2.3), poiché il limite del primo termine vale zero, si conclude che il limite complessivo del rapporto incrementale vale zero $\Rightarrow$ la funzione è derivabile nel punto in esame e risulta

$$f'(0) = 0$$

Possiamo esprimere analiticamente la funzione derivata prima calcolando la derivata prima per x>0:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\cdot 2x - 2x \cdot \log x - x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\left(1 - \log x\right)$$

ed in virtù dello studio del precedente limite porre

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(x) = 2x\left(1-\log x\right) & se\ x > 0 \end{cases}$$

2. Esistenza ed unicità della radice dell'equazione $f(x)=0$

Possiamo studiare la monotonìa della funzione osservando il segno della derivata prima.
Notiamo che per x>0 risulta

$$f'(x) = 2x\left(1-\log x\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(1-\log x\right) \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le e.$$

Dunque **la funzione** è strettamente crescente nell'intervallo]0;*e*[, strettamente decrescente nell'intervallo]*e*;+∞[ed **ammette perciò un massimo relativo**, che **è anche assoluto**, **nel punto *x*=e**, avendosi

$$f(e) = \frac{1}{2}e^2\left(3 - 2\log e\right) + 1 = \frac{e^2}{2} + 1 = Max$$

Il valore del massimo è **positivo**.

A questo punto osserviamo che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2}x^2\left(3-2\log x\right)+1 = \frac{1}{2}\cdot(+\infty)\left[3-2\cdot(+\infty)\right]+1 = (+\infty)\cdot(-\infty)+1 = -\infty$$

e dunque "definitivamente" la funzione assume valori negativi. Questa conclusione, unita all'informazione che il valore del massimo nel punto *x*=*e* è positivo, in virtù del teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua, ci permette di affermare che nell'intervallo]e;+∞[la funzione si deve annullare almeno una volta ed avendo precisato che in detto intervallo la funzione è strettamente decrescente possiamo addirittura affermare che il punto x=α in cui si annulla è unico.

Per rispondere completamente al quesito dobbiamo ancora far vedere che nell'intervallo [0;*e*] la funzione non ammette altri zeri. Ciò è vero perché agli estremi dell'intervallo la funzione assume valori positivi ed internamente allo stesso è strettamente crescente ⇒ la funzione nell'intervallo considerato assume valore positivo e dunque non si può annullare. Concludiamo che nell'intervallo [0;+∞[la funzione ammette un solo zero e dunque che l'equazione $f(x)=0$ ammette la sola radice reale $x=\alpha$, risultando $\alpha>e$.

Calcolo del valore di α con due cifre decimali esatte

Abbiamo già acquisito che $\alpha>e$. Proviamo a determinare una limitazione superiore per α. A tal proposito osserviamo che

$$f(e^2)=\frac{1}{2}e^4\left(3-2\cdot\log e^2\right)+1=\frac{e^4}{2}(3-4)+1=-\frac{e^4}{2}+1<0$$

e dunque possiamo affermare che

$$e<\alpha<e^2$$

Applicazione del metodo di bisezione ed utilizzo di Excel

Per determinare il valore approssimato x=α con due cifre decimali esatte utilizziamo il metodo di bisezione e ci serviamo dell'applicazione Excel.

Chiariamo in cosa consiste **il metodo di bisezione (o dicotomico).**

Una volta acquisito che lo zero x=α della funzione *f* definita nell'intervallo [a;b] è interno all'intervallo e che la funzione agli estremi dello stesso assume segno discorde (quindi che $f(a)\cdot f(b)<0$) si calcola il valore della funzione nel punto medio $\bar{x}=\frac{a+b}{2}$ dell'intervallo e lo si confronta con i valori $f(a)$, $f(b)$ per stabilire la collocazione del punto x=α rispetto al punto $\bar{x}$; fatto ciò, la ricerca continua nel nuovo intervallo che sarà

$\left[a;\bar{x}\right]$, se $f\left(\bar{x}\right)$ è discorde con $f(a)$;

$\left[\bar{x};b\right]$, se $f\left(\bar{x}\right)$ è discorde con $f(b)$.

Poiché ad ogni passaggio l'ampiezza dell'intervallo che contiene il valore α si dimezza, dopo *n* passi conosceremo gli estremi dell'intervallo di ampiezza $l_n=\frac{b-a}{2^n}$ in cui cade il valore α cercato. Assumendo come valore approssimato per α il punto medio $\bar{x}$ di detto intervallo avremo la certezza che l'errore commesso sarà inferiore ad $\frac{l_n}{2}$. E' evidente che iterando il procedimento un numero sufficiente di volte si determineranno valori approssimati dello zero che si discostano dal valore effettivo di un valore (errore) che può essere reso piccolo a piacere.

Nel caso specifico si richiede del valore dello zero un'approssimazione che abbia le prime due cifre decimali esatte. Si dovrebbe riuscire a determinare un'approssimazione per difetto ed una per eccesso dello zero che abbiano uguali le prime due cifre decimali. Le due approssimazioni differiranno tra loro per qualche millesimo, certamente meno di un centesimo (0,01=10/1000). Iterando il procedimento si osserverà pertanto il numero di cifre decimali che via via si stabilizzano. Ci si fermerà con la ricerca quando si saranno stabilizzate le prime due.

Riportiamo di seguito una tabella di valori ottenuti con un foglio di lavoro di Excel. Si può notare che il valore approssimato per α con due cifre decimali esatte è α=4,69. Nel processo iterativo le due cifre decimali si stabilizzano dal dodicesimo passaggio.

Nota

Le elaborazioni numeriche sono riportate con cinque cifre decimali. Sarebbe stato inutile riportarne di più, considerato che siamo interessati alla stabilizzazione delle prime due cifre decimali.

Ricerca del valore approssimato di α con il metodo di bisezione							
e =	2,71828	e^2 =	7,389056	$x_1<\alpha<x_2$		$f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1$	
n	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$x_m=(x_1+x_2)/2$	$f(x_m)$	x_2-x_1
0	2,71828	7,38906	4,69453	-26,29908	5,05367	-2,06767	4,67077
1	2,71828	5,05367	4,69453	-2,06767	3,88598	3,15377	2,33539
2	3,88598	5,05367	3,15377	-2,06767	4,46982	1,05297	1,16769
3	4,46982	5,05367	1,05297	-2,06767	4,76175	-0,37438	0,58385
4	4,46982	4,76175	1,05297	-0,37438	4,61578	0,37188	0,29192
5	4,61578	4,76175	0,37188	-0,37438	4,68876	0,00698	0,14596
6	4,68876	4,76175	0,00698	-0,37438	4,72526	-0,18163	0,07298
7	4,68876	4,72526	0,00698	-0,18163	4,70701	-0,08681	0,03649
8	4,68876	4,70701	0,00698	-0,08681	4,69789	-0,03979	0,01825
9	4,68876	4,69789	0,00698	-0,03979	4,69333	-0,01637	0,00912
10	4,68876	4,69333	0,00698	-0,01637	4,69105	-0,00469	0,00456
11	4,68876	4,69105	0,00698	-0,00469	4,68991	0,00115	0,00228
12	4,68991	4,69105	0,00115	-0,00469	4,69048	-0,00177	0,00114
13	4,68991	4,69048	0,00115	-0,00177	4,69019	-0,00031	0,00057
14	4,68991	4,69019	0,00115	-0,00031	4,69005	0,00042	0,00029
15	4,69005	4,69019	0,00042	-0,00031	4,69012	0,00005	0,00014
16	4,69012	4,69019	0,00005	-0,00031	4,69015	-0,00013	0,00007
17	4,69012	4,69015	0,00005	-0,00013	4,69014	-0,00004	0,00004
18	4,69012	4,69014	0,00005	-0,00004	4,69013	0,00001	0,00002
19	4,69013	4,69014	0,00001	-0,00004	4,69013	-0,00002	0,00001
20	4,69013	4,69013	0,00001	-0,00002	4,69013	0,00000	0,00000

Apri il foglio di lavoro

3. Per rappresentare il diagramma della curva, avendo studiato la monotonìa della funzione, è bene stabilire se presenta dei punti di flesso. A tal proposito determiniamo la derivata seconda.

$f'(x)=2x(1-\log x)=2x-2x\log x\Rightarrow$

$f''(x)=2-2\log x-2x\cdot\frac{1}{x}=-2\log x$

$f''(x)\geq 0\Leftrightarrow \log x\leq 0\Leftrightarrow 0<x\leq 1\Rightarrow$ il punto di ascissa x=1 è di flesso e si ha $f(1)=\frac{5}{2}$. Il punto di flesso è dunque $F\left(1;\frac{5}{2}\right)$.

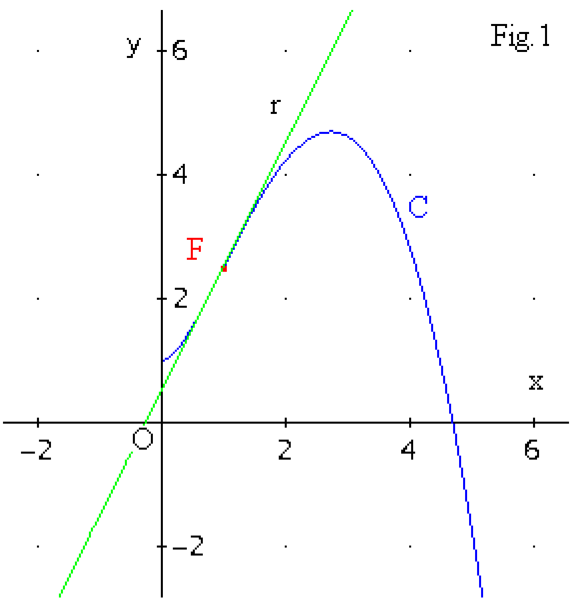


Fig. 1

Ricerca della tangente nel punto di ascissa *x*=1

Il punto del diagramma della curva C è proprio il punto di flesso F; si tratta dunque di scrivere l'equazione della retta r tangente inflessionale. Osserviamo che si tratta di una retta con pendenza positiva perché il suo coefficiente angolare vale $f'(1)=2$. L'equazione della tangente è

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$$y-\frac{5}{2}=2(x-1)\Rightarrow \qquad r: y=2x+\frac{1}{2}$$

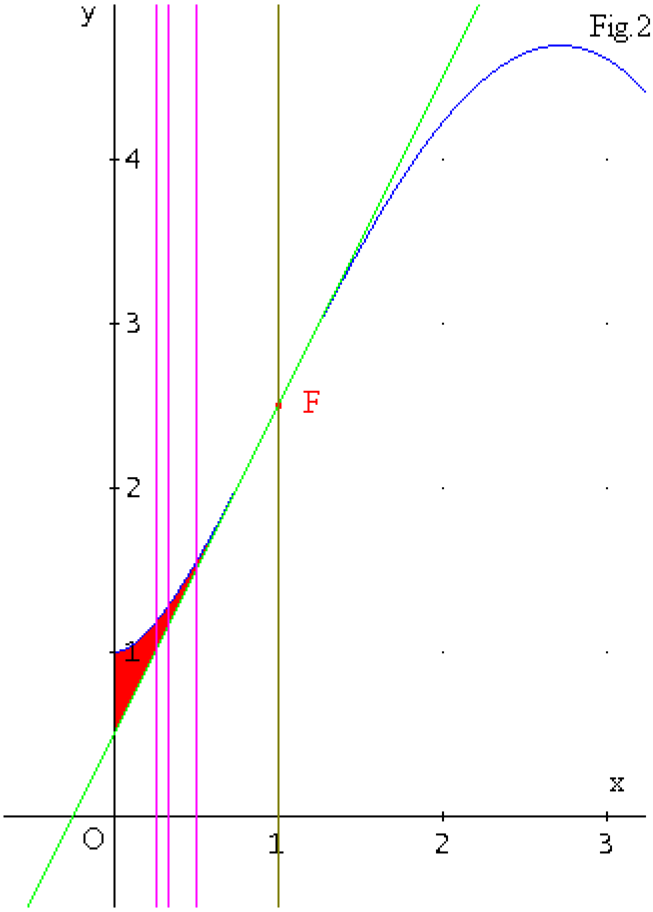
In Fig.1 sono rappresentati parzialmente il diagramma della funzione e la retta tangente richiesta.

Osservazione

Prima di abbandonare questo punto vogliamo far notare che:

nell'intervallo [0;1[la concavità della curva C è rivolta verso l'alto e la curva si trova al di sopra della retta tangente *r*;

nell'intervallo]1;+∞[la concavità della curva è rivolta verso il basso e dunque la curva C giace al di sotto della retta tangente *r*.



4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x=\frac{1}{n}$ e $x = 1$.

Soluzione

Notiamo subito che la retta di equazione $x=\frac{1}{n}$ è parallela all'asse delle ordinate e poiché si devono attribuire ad ***n*** valori naturali positivi deduciamo che le rette corrispondenti taglieranno l'asse delle ascisse in punti dell'intervallo]0;1].

Area del dominio piano definito

"L'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x=\frac{1}{n}$ e $x = 1$"

è data dal valore del seguente integrale definito

$$A_n=\int_{x=1/n}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2\left(3-2\log x\right)+1-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right]dx = \int_{x=1/n}^{1}\left[\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-x^2\log x\right]dx$$

Procediamo decomponendo la funzione integranda in due parti e calcolando i due corrispondenti integrali definiti.

$$I_1=\int_{x=1/n}^{1}\left[\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\right]dx=\left[\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}.$$

$$I_2 = \int_{x=1/n}^{1} \left[-x^2 \log x\right] dx = \left[-\frac{x^3}{3}\log x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} + \int_{x=1/n}^{1} \left[\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\right] dx = +\frac{1}{3n^3}\log\frac{1}{n} + \left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} =$$

$$-\frac{1}{3n^3}\log n + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9n^3}\right).$$

Il valore dell'integrale definito in esame è dunque

$$I = I_1 + I_2 = \left(-\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(-\frac{1}{3n^3}\log n + \frac{1}{9} - \frac{1}{9n^3}\right) = -\frac{11}{19n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3n^3}\log n$$

5. Studio del limite per $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

Per lo studio di questo limite si noti che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{11}{19n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3n^3}\log n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{11}{19n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{9}\right) + \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\log n}{3n^3}\right) =$$

$$\frac{1}{9} + \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\log n}{3n^3}\right)$$

Per il limite residuo, passando al continuo, considerando cioè la funzione di variabile reale $g(t) = -\frac{\log t}{3t^3}$, poiché il limite $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{\log t}{3t^3}\right)$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e sussistono le ipotesi per l'applicazione della regola di De l'Hôpital, si ha:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\log t}{3t^3}\right) \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{3\cdot 3t^2}\cdot\frac{1}{t}\right) = 0$$

Concludiamo che il valore del limite è $\frac{1}{9}$.

Interpretazione del risultato del limite

Il valore ottenuto rappresenta l'area del dominio piano del primo quadrante delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dall'asse delle ordinate; in Fig.2 è rappresentato in colore rosso.

Commenti

1. Si tratta senza dubbio di un bel problema per testare le competenze maturate dagli studenti del Liceo Scientifico. I quesiti n.4 e 5 sono impegnativi. Considerato che questo problema è stato assegnato anche nel corso di ordinamento(1), ritengo che gli studenti di questo corso abbiano avuto qualche difficoltà a risolvere completamente i quesiti.
2. Per quanto concerne il quesito n.4, a proposito della definizione del dominio piano di cui si doveva calcolare l'area, lo si sarebbe potuto individuare semplicemente indicando il suo contorno composto dalla curva C, dalla retta tangente r e dalla retta di equazione $x = \frac{1}{n}$.
3. Nel quesito n.5 si richiede di interpretare il risultato del limite. Abbiamo già precisato che il risultato ottenuto rappresenta l'area del dominio piano del primo quadrante delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dall'asse delle ordinate. Si sarebbero potuti condensare i due quesiti 4 e 5 richiedendo di studiare l'integrale $\int_0^1 f(x)dx$. In tal modo, evitando di suggerire il percorso per il calcolo, magari si sarebbero potute testare altre abilità operative.

(1) Nel corso del Liceo Scientifico di ordinamento il numero di ore settimanali nel triennio superiore è 3, nel Corso sperimentale PNI per l'insegnamento della matematica sono previste n.5 ore settimanali. Un maggior numero di ore disponibili implica anche molte più opportunità formative per gli studenti.