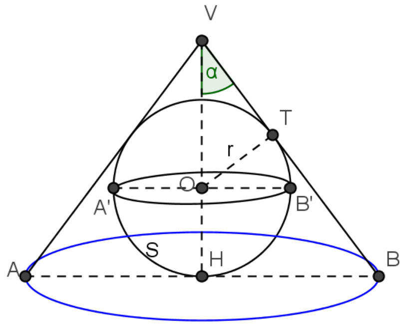
Problema 2

E' data una sfera S di centro O e raggio r. Determinare:

a) il cono C di volume minimo circoscritto a S;
b) il cono C' di volume massimo inscritto in S;
c) un'approssimazione in litri della capacità complessiva di C e C', posto r=1 metro;
d) la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C;
e) la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono C applicando uno dei metodi numerici studiati.

Soluzione

a) A lato è riportata la figura di riferimento per la risoluzione del quesito.
Il cono circoscritto alla sfera S di centro O ha il vertice V e come base il cerchio di diametro AB tangente alla sfera in H. Il punto T è uno dei punti della circonferenza lungo la quale la superficie laterale del cono è tangente alla sfera S; il raggio OT della sfera è perpendicolare all'apotema VB del cono.



VH è l'altezza del cono e l'angolo $H\widehat{V}B = \alpha$ è l'angolo di semiapertura del cono.
Per risolvere il quesito in esame cerchiamo di esprimere in funzione di α e di r il volume del cono in oggetto.

Osserviamo che si ha:

$$\overline{VO} = \frac{r}{sen\alpha}; \qquad \overline{VH} = \overline{VO} + r = r\left(1+\frac{1}{sen\alpha}\right); \ \overline{HB} = \overline{VH}\cdot tg\alpha = r\left(1+\frac{1}{sen\alpha}\right)\cdot\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}.$$

Il volume del cono è

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi\overline{HB}^2\cdot\overline{VH} = \frac{1}{3}\pi r^3\left(1+\frac{1}{sen\alpha}\right)^3\cdot\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\pi r^3}{3}\cdot\frac{(1+sen\alpha)^3}{sen\alpha\cdot\cos^2\alpha} = \frac{\pi r^3}{3}\cdot\frac{(1+sen\alpha)^2}{sen\alpha\cdot(1-sen\alpha)}$$

Se non si vuole che il cono degeneri in un cilindro o in una coppia di piani paralleli tra loro è necessario imporre la limitazione $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ per l'angolo di semiapertura.

Della funzione V(α) si deve determinare il valore minimo.
La derivata prima della funzione è

$$V'(\alpha) = \frac{\pi r^3}{3}\cdot\frac{2(1+sen\alpha)\cos\alpha\cdot sen\alpha\cdot(1-sen\alpha)-(1+sen\alpha)^2\left[sen\alpha\cdot(1-sen\alpha)-sen\alpha\cos\alpha\right]}{sen^2\alpha\cdot(1-sen\alpha)^2} =$$

$$\ldots\ldots = \frac{\pi r^3}{3}\cdot\frac{2(1+sen\alpha)\cos\alpha\left[2(1-sen\alpha)sen\alpha-(1+sen\alpha)(1-2sen\alpha)\right]}{sen^2\alpha\cdot(1-sen\alpha)^2} =$$

$$\frac{\pi r^3}{3}\cdot\frac{2(1+sen\alpha)\cos\alpha\cdot(3sen\alpha-1)}{sen^2\alpha\cdot(1-sen\alpha)^2}$$

Vogliamo studiare la disequazione $V'(\alpha)\geq 0$. Tenendo conto del dominio di variabilità α detta disequazione è equivalente alla seguente

$3sen\alpha - 1 \geq 0$

che è soddisfatta per $\alpha \in \left[arcsen\left(\frac{1}{3}\right); \frac{\pi}{2} \right[$. Limitatamente al dominio di variabilità di α possiamo affermare che la funzione volume V(α) è strettamente decrescente nell'intervallo $\left]0; arcsen\left(\frac{1}{3}\right)\right[$, è strettamente crescente nell'intervallo $\left]arcsen\left(\frac{1}{3}\right); \frac{\pi}{2}\right[$, e quindi il punto $\alpha = arcsen\left(\frac{1}{3}\right)$ è di minimo relativo proprio, anzi di minimo assoluto ed il valore assunto dalla funzione è:

$$V_{\min} = V\left(arcsen\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\pi r^3}{3} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{8}{3}\pi r^3$$

Osservazione

Il cono circoscritto alla sfera ed avente volume minimo ha volume pari al doppio del volume della sfera:

$$V_{cono} = \frac{8}{3}\pi r^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 2V_{sfera}$$

b) Con procedimento analogo a quello seguito per il cono circoscritto si giunge a determinare il volume del con C' inscritto nella sfera. Non riportiamo i calcoli ma solo le conclusioni.

Indicando ancora con α l'angolo di semiapertura del cono inscritto, ed essendo r il raggio della sfera S, si riscontra che il volume del cono inscritto è $V(\alpha) = \frac{8}{3}\pi r^3 \cdot sen^2\alpha \cdot \cos^4\alpha$, ancora con la limitazione $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. In questo caso per α= 0 oppure per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il cono degenera ed ha volume nullo.

Studiando la derivata prima del volume si deduce che il cono di volume massimo si ha per $\alpha = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ed il valore del volume è

$$V_{\max} = \frac{8}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{32}{27}\pi r^3$$

c) Posto r=1 m il volume complessivo dei due coni C, C' è

$$V_{tot} = V_1 + V_2 = \frac{8}{3}\pi r^3 + \frac{32}{27}\pi r^3 = \frac{104}{27}\pi r^3 = \frac{104}{27}\pi \cdot 1000 l \approx 12094{,}8 l \approx 1{,}21 \cdot 10^4 l$$

d) La superficie laterale del cono quando viene sviluppata dà luogo ad un settore circolare. Indichiamo con R il raggio di base del cono (nel nostro caso R rappresenta HB), con *a* la misura dell'apotema, quindi $a = \overline{VB}$, con *l* la misura della circonferenza di base del cono, quindi $l = 2\pi R$ e con ω l'angolo al centro del settore ottenuto dallo sviluppo della superficie laterale del cono. Sussiste la seguente proporzione:

$$l : \omega = 2\pi a : 360° \rightarrow \omega = \frac{l}{2\pi a} \cdot 360° = \frac{2\pi \cdot \overline{HB}}{2\pi \cdot \overline{VB}} \cdot 360° = \frac{\overline{HB}}{\overline{VB}} \cdot 360°$$

Dalla figura si ricava anche che $\frac{\overline{HB}}{\overline{VB}} = sen\alpha$ e poiché per il cono di volume minimo $sen\alpha = \frac{1}{3}$, possiamo scrivere in definitiva $\omega = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$.

e) $\alpha \approx (19{,}4712...)°$