Esercizi sul calcolo Combinatorio

Es_1) Risolvere la seguente equazione

1.1 $\binom{x}{3}+x\binom{x-1}{2}=16\binom{x-1}{3}$

1.2 Determinare il numero naturale ***n*** che verifica la seguente uguaglianza
$D_{n;6}=D_{n;5}$

1.3 Risolvere l'equazione $D'_{n+1;3}+D'_{n;3}=2n\cdot D_{n;2}+141$

Soluzione

1.1 Dal significato di coefficiente binomiale sappiamo che la variabile x deve verificare le seguenti disuguaglianze:
$x\geq 3$, $x-1\geq 2$, $x-1\geq 3 \Rightarrow x\geq 4$
e naturalmente essere un numero naturale. Sviluppiamo i tre coefficienti binomiali presenti e semplifichiamo l'espressione.

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+x\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{2!}=16\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}\Rightarrow\frac{x}{6}+\frac{x}{2}=16\cdot\frac{x-3}{6}\Rightarrow$$

$$4x=16x-48\Rightarrow x=4$$

Il valore ottenuto è accettabile e rappresenta l'unica soluzione dell'equazione.

1.2 I simboli che figurano nell'uguaglianza rappresentano disposizioni semplici e quindi deve risultare

$$D_{n;6}=D_{n;5}\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\Rightarrow\ n=6$$

1.3 Nell'equazione figurano due simboli relativi a disposizioni con ripetizione ed uno a disposizioni semplici. Applicando le relative formule otteniamo:

$$D'_{n+1;3}+D'_{n;3}=2n\cdot D_{n;2}+141\Leftrightarrow\ (n+1)^3+n^3=2n\cdot n(n-1)+141\Leftrightarrow 5n^2+3n-140=0\Rightarrow$$

$$n_1=5,\ n_2=-\frac{28}{5}.$$

Evidentemente è accettabile solo n=5 come soluzione.

Es_2) La "combinazione" di una cassetta di sicurezza è composta da quattro caratteri alfanumerici dei quali uno è una lettera dell'alfabeto internazionale (26 lettere) e gli altri tre sono cifre del sistema decimale (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). E' noto che la lettera è seguita da una cifra dispari nella lettura da sinistra a destra.

2.1 Determinare il numero di codici che si possono generare con le caratteristiche indicate.

2.2 Trovare il numero di codici nei quali compare la lettera C e la somma delle cifre sia uguale a 10.

Soluzione

2.1 Un codice possibile deve contenere una lettera dell'alfabeto internazionale seguita da una cifra dispari. Le lettere sono 26, le cifre dispari sono 1, 3 , 5, 7, 9. Facendo riferimento ad una struttura di quattro celle, come indicato a lato, osserviamo che la lettera non può occupare l'ultima cella a destra perché deve essere seguita da una cifra. Posizionando la lettera nella prima cella (si hanno 26 scelte), nella seconda cella si può mettere una delle cinque cifre dispari, mentre nella terza e nella quarta cella può essere collocata una qualsiasi delle 10 cifre decimali. Pertanto, con la lettera nella prima cella si hanno 26·5·10·10= 13.000 codici diversi.
Si avranno altri 13.000 codici collocando la lettera nella seconda cella ed ancora 13.000 codici aventi la lettera nella terza cella. Il numero complessivo di codici è 3·13.000=39.000

Ordine delle celle			
1°	2°	3°	4°
A	3	2	8
0	B	1	7
6	4	X	9
C	5	5	5
D	7	7	7

2.2 I codici richiesti devono contenere la lettera C che deve essere ancora da una cifra dispari; le altre due cifre non possono essere qualunque, infatti la somma delle tre cifre deve essere 10. Facciamo subito notare che una volta collocata la lettera C in una delle prime tre celle, il numero dei codici ottenibili è sempre lo stesso. Nella tabella riportata a lato sono indicati alcuni dei codici ammissibili, con la lettera C che figura nella prima cella.

Come procedimento da seguire si potrebbe pensare di determinare il numero di codici nei quali figura 1 nella seconda cella, quindi quelli che contengono 3 nella seconda cella, a seguire quelli che contengono il 5, il 7, il 9. Per orientarsi, è bene tenere presente che una volta determinate le cifre nelle celle 3° e 4°, si ottiene una nuova "chiave" per la cassetta di sicurezza, scambiando i valore delle ultime due celle.

Si può riconoscere che ponendo nella seconda cella :

- la cifra 1, si hanno 10 codici;
- la cifra 3, si hanno 8 codici;
- la cifra 5, si hanno 6 codici;
- la cifra 7, si hanno, 4 codici;
- la cifra 9, si hanno 2 codici.

Nel complesso si hanno perciò 10+8+6+4+2=30 codici diversi composti con la lettera C nella prima cella. Si avranno altri 30 codici ponendo la lettera C nella seconda cella ed altri 30 con la lettera C nella terza cella.

Il numero totale dei codici diversi che hanno le caratteristiche indicate è 3·30=90.

Ordine delle celle			
1°	2°	3°	4°
C	1	0	9
C	1	1	8
C	1	2	7
C	1	3	6
C	1	4	5
C	3	0	7
C	3	1	6
C	3	2	5
C	3	3	4
C	5	0	5
C	5	1	4
C	5	2	3
C	7	0	3
C	7	1	2
C	9	0	1

Es_3)

3.1 Determinare il quinto termine dello sviluppo della seguente potenza $\left(2x^2-\frac{1}{x^3}\right)^8$ R: $1120x^{-4}$

3.2 Calcolare la somma $\sum_{k=0}^{2006}\binom{2006}{k}2^{2006-k}\cdot(-1)^k$

Soluzione

3.1 Scrivendo la formula di Newton per lo sviluppo della potenza del binomio si ricava immediatamente il quinto termine richiesto.

$$\left(2x^2-\frac{1}{x^3}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\left(2x^2\right)^{8-k}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^k$$

I quinto termine si ottiene con k=4. Il termine è:

$$\binom{8}{4}\left(2x^2\right)^4\left(-\frac{1}{x^3}\right)^4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!}\cdot16x^8\cdot\frac{1}{x^{12}}=\frac{1120}{x^4}$$

3.2 L'espressione indicata è la forma compatta dello sviluppo della potenza di binomio $(2-1)^{2006}$; pertanto il suo valore vale 1.