

## Probabilità

### Eventi composti e formula di Bayes

#### <sup>(1)</sup>Problema (due arcieri scagliano frecce)

Carlo e Giovanni, amici di gioco, si esercitano al tiro con l'arco. Scagliano due frecce ciascuno verso il bersaglio. E' noto che Carlo ha probabilità di fare centro all'80%, mentre Giovanni fa centro il 70% delle volte. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi.

- $E_1$ ="I due amici realizzano in tutto due centri"
- $E_2$ ="I due amici realizzano almeno un centro"
- Sapendo che è stato fatto un solo centro, determinare la probabilità che sia stato Giovanni a fare centro.

#### Soluzione

a) L'evento  $E_1$  si realizza se si verifica uno dei seguenti eventi:

$E_{1C}$ ="Carlo fa due centri e Giovanni nessun centro"

$E_{1G}$ ="Giovanni fa due centri e Carlo nessun centro"

$E_{1CG}$ ="Carlo e Giovanni realizzano un centro ciascuno"

I tre eventi descritti sono incompatibili e la loro unione fornisce l'evento  $E_1$ .

La probabilità dell'evento  $E_{1C}$  è data dal prodotto delle probabilità che Carlo faccia due centri con la probabilità che Giovanni sbagli i due tiri.

$$P(E_{1C}) = \left(\frac{80}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{30}{100}\right)^2 = \frac{64}{100} \cdot \frac{9}{100} = \frac{36}{625}$$

Analogamente si determina la probabilità che si verifichi  $E_{1G}$ .

$$P(E_{1G}) = \left(\frac{20}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{70}{100}\right)^2 = \frac{4}{100} \cdot \frac{49}{100} = \frac{49}{2500}$$

La probabilità che Carlo faccia un centro è uguale alla somma della probabilità che egli faccia centro con la prima freccia e sbagli con la seconda, oppure che sbagli con la prima freccia e faccia centro con la seconda. La probabilità è:

$$P_{1C} = \frac{80}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{80}{100} = 2 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{8}{25}$$

Analogamente, la probabilità che faccia un solo centro Giovanni è:

$$P_{1G} = \frac{70}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{70}{100} = 2 \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{70}{100} = \frac{21}{50}$$

La probabilità che si verifichi  $E_{1CG}$  è uguale al prodotto delle probabilità  $P_{1C}$ ,  $P_{1G}$ , perché gli eventi sono indipendenti. Dunque

$$P(E_{1CG}) = P_{1C} \cdot P_{1G} = \frac{4}{25} \cdot \frac{21}{50} = \frac{84}{625}$$

#### Conclusione

La probabilità che si verifichi l'evento  $E_1$  è



<sup>(1)</sup> Problema proposto nella prova scritta M3\_4D-20-12-11 (classe quarta di Liceo Scientifico, Ind.PNI)

$$P(E_1) = P(E_{1C}) + P(E_{1G}) + P(E_{1CG}) = \frac{36}{625} + \frac{49}{2500} + \frac{84}{625} = \frac{144 + 49 + 336}{2500} = \frac{529}{2500}$$

\*\*\*\*\*

b) Osserviamo che l'evento in questione è il contrario dell'evento "i due amici sbagliano con entrambe le frecce", quindi

$$\text{Not}(E_2) = \overline{E_2} = \text{"i due amici sbagliano con entrambe le frecce"};$$

pertanto, per il teorema della probabilità dell'evento contrario, si ha:

$$P(E_2) = 1 - P(\overline{E_2})$$

L'evento  $\overline{E_2}$  si verifica se contemporaneamente i due amici sbagliano i due tiri e la probabilità che ciò si verifichi è data dal prodotto delle probabilità che entrambi sbagliano i due tiri (si tenga conto che i risultati dei singoli tiri dei due amici sono indipendenti l'uno dall'altro, nonché sono indipendenti i risultati di un amico dai risultati dell'altro amico).

Dunque, risulta

$$P(\overline{E_2}) = \frac{20}{100} \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{9}{2.500}$$

### Conclusione

La probabilità che i due amici realizzino almeno un centro è:

$$P(E_2) = 1 - P(\overline{E_2}) = 1 - \frac{9}{2.500} = \frac{2.491}{2.500} = 0,9964$$

\*\*\*\*\*

c) Poniamo  $E =$  "I due amici realizzano nel complesso un solo centro". Indichiamo con:

$G/E =$  "la freccia con cui è stato realizzato il centro appartiene a Giovanni",

$C/E =$  "la freccia con cui è stato realizzato il centro appartiene a Carlo".

Si tratta di determinare la probabilità  $P(G/E)$ . Indichiamo con  $P(C)$  la probabilità che la freccia con cui è stato fatto centro appartiene a Carlo e con  $P(G)$  la probabilità che la freccia con cui è stato fatto centro appartiene a Giovanni. Poiché i due amici hanno scagliato ciascuno due frecce  $P(C) = P(G) = 1/2$ .

Applicando la formula di Bayes abbiamo:

$$P(G/E) = \frac{P(G \cap E)}{P(E)} = \frac{P(G \cap E)}{P(G \cap E) + P(C \cap E)} = \frac{P(G) \cdot P(E/G)}{P(G) \cdot P(E/G) + P(C) \cdot P(E/C)} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{70}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{70}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{80}{100}} = \frac{70}{70 + 80} = \frac{7}{15}$$

### Conclusione

La probabilità che tra i due amici sia stato Giovanni a realizzare l'unico centro è  $7/15$ .