Massimi e minimi vincolati

Quesito[1]

Trovare, se esistono, il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x;y) = y - \sqrt{y - x^2}$$

nell'insieme

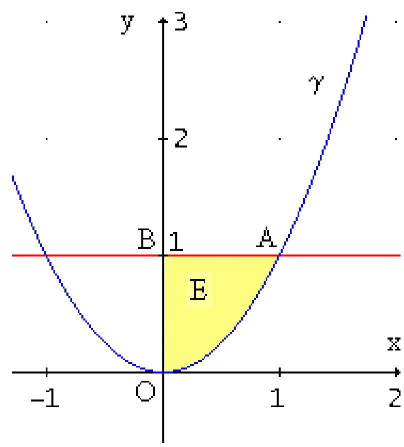
$$E = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 \le y \le 1\right) \wedge \left(x \ge 0\right) \right\}$$

Soluzione

La funzione in esame è definita nel dominio piano $D = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2 \right\}$ costituito da tutti i punti P(x;y) interni alla parabola $\gamma : y = x^2$ e da quelli della parabola stessa.

La funzione è continua e poiché il dominio E è chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass la ammette sia il massimo, sia il minimo assoluti. Per determinare i valori del massimo e del minimo assoluti si deve effettuare la ricerca all'interno del dominio E e sulla frontiera dello stesso.

Nella figura a lato è indicato in colore il dominio E, delimitato dall'arco $\overset{\frown}{OA}$ della parabola $\gamma : y = x^2$, dal segmento AB e dal segmento OB, essendo A(1;1), B(0;1) ed O l'origine degli assi.



Studio all'interno del dominio

Per la ricerca di eventuali punti di massimo e minimo relativo internamente ad un dominio in cui la funzione sia dotata delle derivate parziali dei primi due ordini si cercano i punti del dominio in cui si annullano le derivate parziali prime (punti critici). La condizione che si annullino le derivate parziali prime in un punto $P_0(x_0;y_0)$ interno al dominio di una funzione è condizione necessaria ma non sufficiente perché detto punto sia di massimo o di minimo relativo; per classificare il punto è necessario calcolare anche il valore dell'Hessiano della funzione in quel punto.

L'Hessiamo associato alla funzione $f(x;y)$ è il determinante del secondo ordine

$$H(x;y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Nota

Per brevità di scrittura si pone

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x^{'};\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_y^{'};\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}^{"};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}^{"};\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}^{"};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}^{"}.$$

Ricordiamo che sussiste il seguente

---

[1] Quesito della prova d'esame di Analisi matematica II/ 10-09-2002/Facoltà d'Ingegneria/Lecce

Criterio per la classificazione dei punti di massimo e di minimo relativo

Sia $f(x;y)$ una funzione continua in un dominio piano D ed avente derivate parziali prime e seconde continue internamente a D. Sia $P_0(x_0;y_0)$ un punto **interno** al dominio D e tale che

$$f_x^{'}(x_0;y_0)=0 \qquad \text{e} \qquad f_y^{'}(x_0;y_0)=0$$

Sussistono i seguenti casi

1) se $\begin{cases} H(x_0;y_0)>0 \\ f_{xx}^{''}(x_0;y_0)>0 \end{cases}$ allora il punto $P_0(x_0;y_0)$ è di **minimo relativo**;

2) se $\begin{cases} H(x_0;y_0)>0 \\ f_{xx}^{''}(x_0;y_0)<0 \end{cases}$ allora il punto $P_0(x_0;y_0)$ è di **massimo relativo**;

3) se $H(x_0;y_0)<0$ allora il punto $P_0(x_0;y_0)$ non è né di massimo, né di minimo relativo. **Il punto è di sella**.

4) Se $H(x_0;y_0)=0$ allora per il punto $P_0(x_0;y_0)$ non si può dire nulla; occorre uno studio particolare per precisarne il tipo. In questo caso si può studiare direttamente la disuguaglianza $f(x;y)-f(x_0;y_0)>0$ per stabilire il comportamento della funzione in un intorno del punto $P_0(x_0;y_0)$.

Ricerca dei punti critici

Calcoliamo le derivate parziali prime e vediamo dove si annullano.

$$f_x^{'}=-\frac{1}{2}\left(y-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\frac{x}{\sqrt{y-x^2}};$$

$$f_y^{'}=1-\frac{1}{2}\left(y-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{y-x^2}-1}{2\sqrt{y-x^2}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y-x^2}}=0 \\ \dfrac{2\sqrt{y-x^2}-1}{2\sqrt{y-x^2}}=0 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=\frac{1}{4}.$$

Il punto $P\left(0;\frac{1}{4}\right)$ non è interno al dominio, dunque non si può applicare il criterio indicato sopra. Possiamo concludere che internamente al dominio della funzione non ci sono punti di massimo, né di minimo relativo.

Studio sulla frontiera

Studio sull'arco $\overset{\frown}{OA}$ della parabola

$$\begin{cases} \gamma: y=x^2 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow f(x;x^2)=g_1(x)=x^2$$

La funzione $g_1(x)$ nell'intervallo]0;1[è strettamente crescente, perché ha derivata prima positiva e quindi il punto x=0 è di minimo assoluto e risulta $g_1(0)=0$, il punto x=1 è di massimo assoluto e risulta $g_1(1)=1$.

Studio sul segmento AB

$$\begin{cases} f(x;y) = y - \sqrt{y-x^2} \\ (0 \le x \le 1) \wedge (y=1) \end{cases} \Rightarrow f(x;1) = g_2(x) \ = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

Troviamo la derivata prima per lo studio della monotonia nell'intervallo [0;1]

$$g'_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$g'_2(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow$ la funzione è strettamente crescente nell'intervallo]0;1[.

Il punto x=0 è di minimo assoluto e si ha $g_2(0) = 1 - \sqrt{1-0} = 0$;

il punto x=1 è di massimo assoluto e si ha $g_2(1) = 1 - \sqrt{1-1} = 1$.

Tenendo conto che si sta effettuammo lo studio sul segmento AB si conclude che la funzione nel punto A(1;1) assume il massimo, nel punto (B(0;1) il minimo.

Studio sul segmento OB

$$\begin{cases} f(x;y) = y - \sqrt{y-x^2} \\ (x=0) \wedge (0 \le y \le 1) \end{cases} \Rightarrow f(0;y) = g_3(y) = y - \sqrt{y}$$

Monotonia

$$g'_3(y) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}-1}{2\sqrt{y}}$$

$g'_3(y) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < y \le 1 \quad \Rightarrow \quad$ la funzione $g_3(y)$ è strettamente decrescente nell'intervallo $\left]0;\frac{1}{4}\right[$ e strettamente crescente nell'intervallo $\left]\frac{1}{4};1\right]$, quindi assume il suo minimo assoluto per $y = \frac{1}{4}$ e risulta $g_3\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$; agli estremi dell'intervallo la funzione si annulla e questo valore è il massimo assoluto.

Conclusione

Relativamente al segmento OB la funzione assume il suo minimo assoluto nel punto $P\left(0;\frac{1}{4}\right)$ ed il valore è $f(P) = -\frac{1}{4}$, mentre nei punti estremi O(0;0), B(0;1) si annulla ed il valore è massimo assoluto.

Sintesi dei dati			
Frontiera	Punti trovati	Tipo	Valore della funzione
Arco $\overset{\frown}{OA}$	O(0;0)	Punto di minimo	0
	A(1;1)	Punto di massimo	1
Segmento AB	A(1;1)	Punto di massimo	1
	B(0;1)	Punto di minimo	0
Segmento OB	$P\left(0;\frac{1}{4}\right)$	Punto di minimo	$-\frac{1}{4}$
	O(0;0)	Punto di massimo	0
	B(0;1)	Punto di massimo	0
Conclusione			
La funzione f(x;y) assume il minimo assoluto nel punto P ed il massimo assoluto nel punto A.			

Conclusione generale

La funzione f(x;y) assume il minimo assoluto nel punto $P\left(0;\frac{1}{4}\right)$ ed il valore è $f(P)=-\frac{1}{4}$ ed assume il valore massimo nel punto A(1;1) ed il valore è $f(A)=1$.