Pubblicato l'8-07-2009

Integrale Generalizzato

Studiare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+2)}dx$$

Soluzione

L'integrale in esame è convergente e ciò si deduce dal fatto che la funzione integranda è definita su tutto l'intervallo di integrazione, è continua e per $x \to +\infty$ è un infinitesimo di ordine 3/2, dunque maggiore di uno. Per il calcolo dell'integrale generalizzato occorre determinare una primitiva della funzione integranda e ciò si consegue applicando il metodo di integrazione per sostituzione. La sostituzione da effettuare è

$\sqrt{x} = t \to x = t^2$, $dx = 2tdt$.

Faccio presente che la sostituzione effettuata determina la funzione ausiliaria $\varphi : [1;+\infty[\to [1;+\infty[$, con $x = \varphi(t) = t^2$, che è derivabile ed invertibile, dunque è idonea per la sostituzione indicata. Riporto le elaborazioni necessarie.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+2)}dx = \lim_{k\to+\infty}\int_1^k \frac{2tdt}{t\left(t^2+2\right)} = \lim_{k\to+\infty} 2\int_1^k \frac{dt}{2\left(\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} = \lim_{k\to+\infty}\sqrt{2}\int_1^k \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt{2}\left[arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_1^k = \lim_{k\to+\infty}\sqrt{2}\left(arctg\,\frac{k}{\sqrt{2}} - arctg\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 1,3509$$