Funzione logaritmica

In relazione alla funzione

$f(x) = \left|2\log x - \log|\log x|\right|$

1) determinare il dominio di definizione;
2) studiare i limiti nei punti di accumulazione per il dominio e non appartenenti allo stesso;
3) precisare se ammette asintoti;
4) precisare quali siano l'estremo inferiore, l'estremo superiore e se ammette punti di massimo e o di minimo relativo o assoluto;
5) indicare approssimativamente l'andamento del diagramma.

Soluzione

1) La funzione è definita nell'insieme $A =]0;1[\cup]1;+\infty[$ e la sua esplicitazione è

$$f(x) = \begin{cases} \left|2\log x - \log(-\log x)\right| & per \quad 0 < x < 1 \\ \left|2\log x - \log(\log x)\right| & per \quad x > 1 \end{cases}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left|2\log x - \log(-\log x)\right| = \lim\limits_{x\to 0^+}\left|2\cdot(-\infty) - \log(-(-\infty))\right| = \left|-\infty - (+\infty)\right| = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left|2\log x - \log(-\log x)\right| = \lim\limits_{x\to 1^-}\left|2\cdot 1 - \log(-(0^-))\right| = \left|2 - (-\infty)\right| = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left|2\log x - \log(\log x)\right| = \lim\limits_{x\to 1^+}\left|2\cdot 1 - \log(0^+)\right| = \left|2 - (-\infty)\right| = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left|2\log x - \log(\log x)\right| = \lim\limits_{t\to +\infty}\left|2t - \log t\right| = \lim\limits_{t\to +\infty}\left|t\left(2 - \frac{\log t}{t}\right)\right| = \left|+\infty(2-0)\right| = +\infty$.

3) **Asintoti**

L'asse delle ordinate è asintoto verticale da destra, mentre la retta x=1 è asintoto verticale da destra e da sinistra.

Il diagramma della funzione non ammette asintoto orizzontale, né asintoto obliquo.

Infatti risulta

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left|2\log x - \log(\log x)\right|}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left|\frac{2\log x}{x} - \frac{\log(\log x)}{x}\right| = 0$$

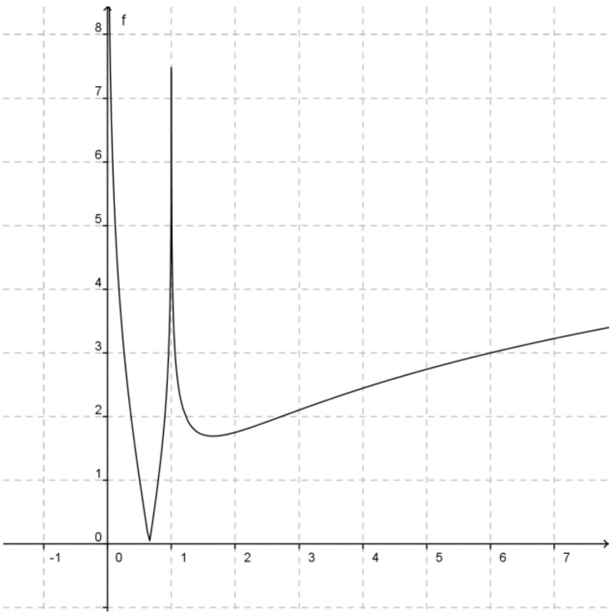

Figura 1

4) Osserviamo che risultando

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\log x - \log(-\log x)\right) = -\infty$ e

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(2\log x - \log(-\log x)\right) = +\infty$,dalla continuità della funzione nell'intervallo]0;1[, si deduce che il diagramma della funzione ammette almeno uno zero $x=\alpha$ interno all'intervallo suddetto. Il punto $x=\alpha$ è di minimo assoluto.

D'altra parte, il valore del limite per $x \to 1^+$ e quello per $x \to +\infty$ e la continuità della funzione, nonché la derivabilità della stessa nell'intervallo $]1;+\infty[$, permettono di affermare che la funzione ammette almeno un secondo punto di minimo relativo proprio $x=\beta\in]1;+\infty[$, che teoricamente potrebbe essere anche di minimo assoluto.

Sup(f)=+∞, Inf(f)=0=min

5) Il diagramma della funzione è riportato approssimativamente in **Figura 1** e da esso si desume che x=β è solo punto di minimo relativo proprio. Possiamo giustificare questa affermazione rigorosamente osservando che per x>0 risulta $x > \log x$ e che per x>1 si ha anche $\log x > \log \ \log x$ e dunque $2\log x - \log \ \log x \ > 0$, da cui si conclude che $f \ \beta \ > 0$.

In **Figura 2** sono rappresentate la funzione y=f(x), con tratto continuo e in colore nero e la funzione derivata prima y=f'(x), con stile tratteggio e con colore blu; sono altresì evidenziati il punto di minimo assoluto x=α e quello di minimo relativo proprio x=β .

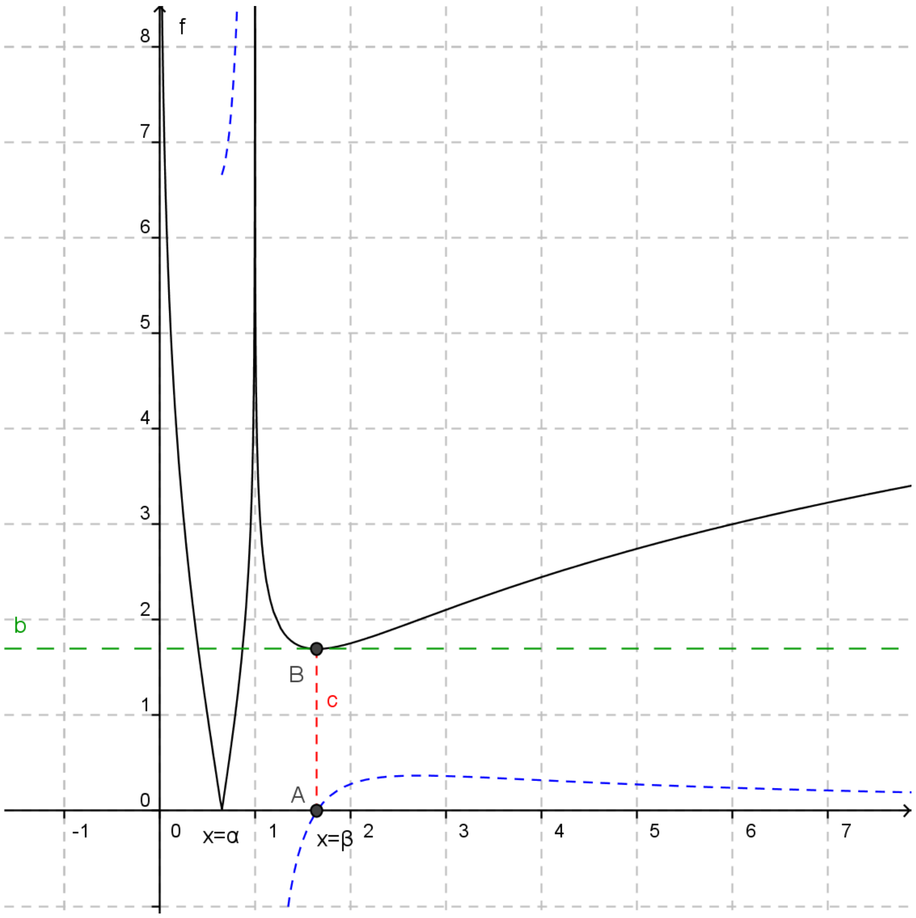

Figura 2