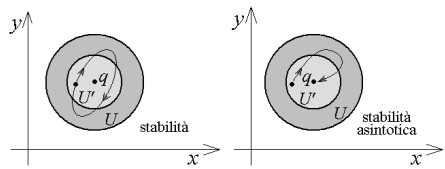
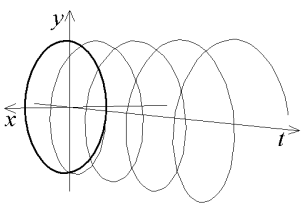
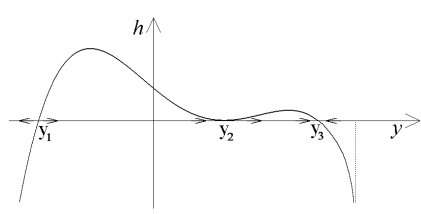
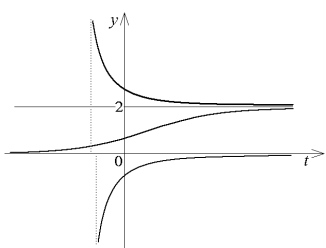


STUDIO QUALITATIVO DI EQUAZIONI AUTONOME DEL I ORDINE

CENNI AI SISTEMI AUTONOMI DEL I ORDINE

COSIMO DE MITRI



1. Equazioni autonome del primo ordine pag. 1

2. Sistemi autonomi del primo ordine pag. 6

ANNO 2020

**UNA PRIMA PARTE DI QUESTA DISPENSA
E' PRESENTE SU**



<https://ilmiolibro.kataweb.it/libro/didattica-e-dispense/216997/appunti-di-analisi-matematica-iii-3/>

EQUAZIONI AUTONOME E SISTEMI AUTONOMI DEL I ORDINE

(C. DE MITRI)

1. Equazioni autonome del primo ordine

Consideriamo l'equazione autonoma $y' = h(y)$, dove $y = y(t)$ è la funzione incognita ed h è una funzione reale definita in J intervallo aperto di \mathbb{R} . Possiamo immaginare che la variabile indipendente rappresenti il tempo, tant'è che sarà indicata con la lettera t e ne sarà privilegiato l'intervallo $t \geq 0$. La particolarità è che la funzione h non dipende dalla t , ma solo dalla y , che in questo contesto chiameremo anche *variabile di stato*.

Si può tentare di risolvere l'equazione mediante separazione delle variabili; ma qui siamo interessati ad uno *studio qualitativo delle soluzioni*, da effettuare senza l'ausilio della loro rappresentazione analitica, bensì utilizzando soltanto l'equazione stessa.

Per soluzioni intenderemo sempre soluzioni massimali; se φ è una soluzione, l'intervallo in cui è definita sarà indicato con I_φ . A volte, per comodità di linguaggio, identificheremo le soluzioni con i relativi grafici, ossia con le curve integrali tracciate in $\mathbb{R} \times J$.

E' noto che, se h è local/te lipschitziana in J , come sempre supporremo, allora per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times J$ passa una ed una sola curva integrale. Inoltre, nel caso $J = \mathbb{R}$, se $\exists p, q \in [0, +\infty[$ t.c. $\forall y \in \mathbb{R} |h(y)| \leq p + q|y|$, allora tutte le soluzioni sono definite in \mathbb{R} .

Se $\bar{y} \in J$ è uno zero di h , la funzione costante $y(t) = \bar{y}$, $t \in \mathbb{R}$, è soluzione dell'equazione, detta *soluzione stazionaria* o *di equilibrio*, così come il punto \bar{y} è detto *punto* o *stato stazionario*, o *critico* o *di equilibrio*: se il sistema, in un dato istante, ad esempio l'istante $t = 0$, si trova nello stato \bar{y} , rimane in questo stesso stato per tutto il tempo che segue.

Se $\varphi(t)$ è soluzione (in I_φ), allora $\forall \tau \in \mathbb{R}$ la funzione $\psi(t) = \varphi(t - \tau)$ è anch'essa soluzione, definita in $I_\psi = I_\varphi + \tau$; risulta infatti $\psi'(t) = \varphi'(t - \tau) = h(\varphi(t - \tau)) = h(\psi(t))$.

Viceversa, se $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ sono soluzioni tali che $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$ per qualche $t_1 \in I_\varphi$ e $t_2 \in I_\psi$, allora esiste $\tau \in \mathbb{R}$ tale che $\psi(t) = \varphi(t - \tau)$, e $I_\psi = I_\varphi + \tau$; infatti, posto $\tau = t_2 - t_1$ e considerata la soluzione $\chi(t) := \varphi(t - \tau)$, si ha che $\chi(t_2) = \psi(t_2)$, da cui segue, per via dell'unicità, che $\chi = \psi$, intendendo con ciò che vale anche l'uguaglianza $I_\chi = I_\psi$, ossia $I_\psi = I_\varphi + \tau$.

Per ogni $q \in J$ denotiamo con φ_q la curva integrale passante per $(0, q)$. In base a quanto è stato appena stabilito, essa può essere assunta come rappresentativa di tutte le curve integrali che intersecano la retta $y = q$, e che sono tutte e sole le curve che si ottengono dalla φ_q per traslazione parallela all'asse dei tempi.

Se φ è una soluzione tale che $\varphi'(\bar{t}) = 0$ per qualche $\bar{t} \in I_\varphi$, allora φ è una soluzione stazionaria, e $I_\varphi = \mathbb{R}$; infatti, posto $\bar{y} := \varphi(\bar{t})$, si ha che $h(\bar{y}) = \varphi'(\bar{t}) = 0$, da cui segue che la funzione costante $y(t) = \bar{y}$, $t \in \mathbb{R}$, è soluzione, la quale deve coincidere con φ dal momento che anch'essa soddisfa la condizione $y(\bar{t}) = \bar{y}$.

Ne segue che, se φ è una soluzione non stazionaria, allora risulta $\varphi'(t) > 0$ su I_φ oppure $\varphi'(t) < 0$ su I_φ , e quindi in ogni caso φ è strett/te monotona.

Altre importanti osservazioni sulle equazioni autonome saranno evidenziate nel corso della discussione degli esempi che seguono, e i principali risultati di carattere generale, con particolare riferimento ai problemi di stabilità degli stati stazionari, saranno illustrati successivamente.

Esempio 1.1. Consideriamo l'equazione $y' = 8y^2 - y^5$.

-) Posto $h(y) = 8y^2 - y^5$, si vede che $h \in C^1(\mathbb{R})$, per cui h è local/te lipschitziana in \mathbb{R} . Invece la condizione che esistano $p, q \in [0, +\infty[$ tali che $\forall y \in \mathbb{R} |h(y)| \leq p + q|y|$ non è soddisfatta, per cui non è detto che le soluzioni siano definite in tutto \mathbb{R} .

Per ogni $q \in \mathbb{R}$ indichiamo con φ_q la soluzione che soddisfa il dato iniziale $y(0) = q$, definita in $]a_q, b_q[$, dove $-\infty \leq a_q < 0 < b_q \leq +\infty$.

-) L'equazione ammette le soluzioni stazionarie $y(t) = 0$ e $y(t) = 2$, $t \in \mathbb{R}$.

-) Sia $0 < q < 2$. La curva φ_q è tutta contenuta nella striscia $0 < y < 2$.

Poiché $\varphi_q'(0) = h(q) > 0$, φ_q è strett/te crescente. Ne segue che, posto $\text{Im}(\varphi_q) =]l_q, L_q[$, risulta $l_q = \lim_{t \rightarrow a_q} \varphi_q(t) \in [0, q[$ e $L_q = \lim_{t \rightarrow b_q} \varphi_q(t) \in]q, 2]$.

Non è possibile che esista $k \in \mathbb{R}$ t.c. $b_q < k$, perché

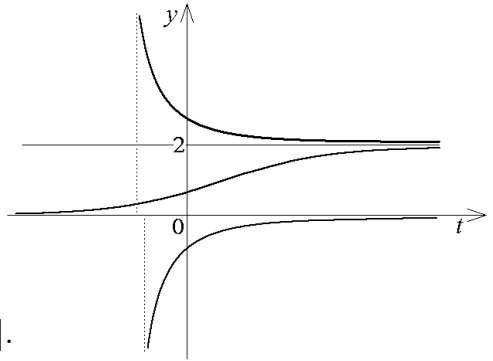
altrimenti la parte destra della curva φ_q sarebbe contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette $x = 0$, $x = k$, $y = q$, $y = 2$. Pertanto $b_q = +\infty$.

Si osserva che $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_q'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(\varphi_q(t)) = \lim_{y \rightarrow L_q} h(y) = \lim_{y \rightarrow L_q} (8y^2 - y^5) = 8L_q^2 - L_q^5$; ne segue, per il teorema dell'asintoto⁽¹⁾, che $8L_q^2 - L_q^5 = 0$, e quindi dev'essere $L_q = 2$. In modo analogo si dimostra che $a_q = -\infty$ e che $l_q = 0$.

Ponendo $y = \varphi_q(t)$, da $y' = 3y - y^2$ segue che $y'' = (16 - y^3)yy'$, da cui si deduce che $y'' > 0$ per $y < \sqrt[3]{\frac{16}{5}}$, essendo $y > 0$ e $y' > 0$. Ciò implica che φ_q è prima convessa e poi concava, con un flesso ad altezza $\sqrt[3]{\frac{16}{5}}$.

-) Sia $q > 2$. La curva φ_q è tutta contenuta nel semipiano $y > 2$.

Poiché $\varphi_q'(0) = f(q) < 0$, φ_q è strett/te decrescente. Ne segue che, posto $\text{Im}(\varphi_q) =]l_q, L_q[$, risulta $L_q = \lim_{t \rightarrow a_q} \varphi_q(t) \in]q, +\infty[$ e $l_q = \lim_{t \rightarrow b_q} \varphi_q(t) \in [2, q[$.



⁽¹⁾ **Teorema dell'asintoto orizzontale.** Sia $\varphi(t)$ derivabile in $]a, +\infty[$.

Se $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = l \in \mathbb{R}$ ed $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = m \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $m = 0$.

Dim. Per ogni $t \in]a, +\infty[$, per il teorema di Lagrange esiste $\tau_t \in]t, t+1[$ tale che $\varphi'(\tau_t) = \varphi(t+1) - \varphi(t)$. La tesi segue passando al limite per $t \rightarrow +\infty$ in ambo i membri della precedente uguaglianza, ove si osservi che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(\tau_t) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi'(\tau) = m$.

Non è possibile che esista $k \in \mathbb{R}$ t.c. $b_q < k$, perché altrimenti la parte destra della curva φ_q sarebbe contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette $x = 0$, $x = k$, $y = 2$, $y = q$. Pertanto $b_q = +\infty$.

Si osserva che $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'_q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(\varphi_q(t)) = \lim_{y \rightarrow l_q} h(y) = \lim_{y \rightarrow l_q} (8y^2 - y^5) = 8l_q^2 - l_q^5$; ne segue, per il teorema dell'asintoto, che $3l_q - l_q^2 = 0$, e quindi dev'essere $l_q = 2$.

Allo scopo di ottenere informazioni su a_q ed L_q , risolviamo parzialmente l'equazione.

Si calcola: $\int_q^y \frac{1}{8w^2 - w^5} dw = \int_0^t d\tau$, da cui segue $t = \int_q^y \frac{1}{8w^2 - w^5} dw =: t(y)$.

La funzione $t = t(y)$ non è che l'inversa di φ_q .

Si vede che $\forall y > q \exists t(y) \in \mathbb{R}$, cosicché $L_q = +\infty$.

Inoltre risulta $a_q = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_q^y \frac{1}{8w^2 - w^5} dw = \int_q^{+\infty} \frac{1}{8w^2 - w^5} dw \in \mathbb{R}$, cosicché $a_q \in \mathbb{R}$.

In modo analogo si possono riottenere i risultati $l_q = 2$ e $b_q = +\infty$.

Ponendo $y = \varphi_q(t)$, da $y' = 8y^2 - y^5$ segue che $y'' = (16 - y^3)y y'$, da cui ancora $y'' < 0$, essendo $y > 0$ e $y' < 0$. Ciò implica che φ_q è convessa in $]a_q, +\infty[$.

-) Sia $q < 0$. Procedendo come nel caso precedente si scopre che la soluzione φ_q è strett/te crescente, è definita in $]a_q, +\infty[$ con $a_q \in \mathbb{R}$, ha codominio $] -\infty, 0[$ ed è concava.

Esempio 1.2. Consideriamo l'equazione $y' = y - \sqrt{2y}$.

-) Posto $h(y) = y - \sqrt{2y}$ e $J =]0, +\infty[$, si vede che h è definita in \bar{J} e che $h \in C^1(J)$, per cui h è local/te lipschitziana in J .

Per ogni $q \geq 0$ indichiamo con φ_q la soluzione che soddisfa il dato iniziale $y(0) = q$, definita in $]a_q, b_q[$, dove $-\infty \leq a_q < 0 < b_q \leq +\infty$.

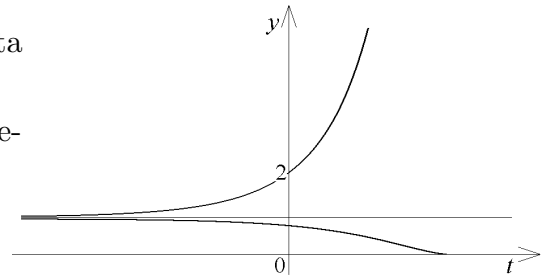
-) L'equazione ammette le soluzioni stazionarie $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, il cui grafico è la frontiera di $J \times \mathbb{R}$, e $y(t) = 2$, $t \in \mathbb{R}$.

-) Sia $0 < q < 2$. La curva φ_q è tutta contenuta nella striscia $0 < y < 2$.

Poiché $\varphi'_q(0) = h(q) > 0$, φ_q è strett/te decrescente.

Ne segue che, se $\text{Im}(\varphi_q) :=]l_q, L_q[$,

allora risulta $L_q = \lim_{t \rightarrow a_q} \varphi_q(t) \in]q, 2]$ e $l_q = \lim_{t \rightarrow b_q} \varphi_q(t) \in [0, q[$.



Non è possibile che esista $k \in \mathbb{R}$ t.c. $a_q > k$, perché altrimenti la parte sinistra della curva φ_q sarebbe contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette $x = k$, $x = 0$, $y = q$, $y = 2$. Pertanto $a_q = -\infty$.

Si osserva che $\exists \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi'_q(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} h(\varphi_q(t)) = \lim_{y \rightarrow L_q} h(y) = \lim_{y \rightarrow L_q} (y - \sqrt{2y}) = L_q - \sqrt{2L_q}$; ne segue, per il teorema dell'asintoto, che $L_q - \sqrt{2L_q} = 0$, e quindi si ha $L_q = 2$.

Allo scopo di ottenere informazioni su b_q ed l_q , risolviamo parzialmente l'equazione.

Si calcola: $\int_q^y \frac{1}{w - \sqrt{2w}} dw = \int_0^t d\tau$, da cui segue $t = \int_q^y \frac{1}{w - \sqrt{2w}} dw =: t(y)$.

La funzione $t = t(y)$ non è che l'inversa di φ_q .

Si vede che $\forall y \in]0, q[\exists t(y) \in \mathbb{R}$, cosicché $l_q = 0$.

Inoltre risulta $b_q = \lim_{y \rightarrow 0} \int_q^y \frac{1}{w - \sqrt{2w}} dw = \int_q^0 \frac{1}{w - \sqrt{2w}} dw \in \mathbb{R}$, cosicché $b_q \in \mathbb{R}$.

Ponendo $y = \varphi_q(t)$, da $y' = y - \sqrt{2y}$ segue che $y'' = (1 - \frac{1}{\sqrt{2y}})y'$, da cui si deduce che $y'' > 0$ per $y < \frac{1}{2}$, essendo $y' < 0$. Ciò implica che φ_q è prima concava e poi convessa, con un flesso ad altezza $\frac{1}{2}$.

-) Sia $q > 2$. La curva φ_q è tutta contenuta nel semipiano $y > 2$.

Poiché $\varphi_q'(0) = f(q) > 0$, φ_q è strett/te crescente. Ne segue che, posto $\text{Im}(\varphi_q) =]l_q, L_q[$, risulta $l_q = \lim_{t \rightarrow a_q} \varphi_q(t) \in [2, q[$ e $L_q = \lim_{t \rightarrow b_q} \varphi_q(t) \in]q, +\infty[$.

Non è possibile che esista $k \in \mathbb{R}$ t.c. $a_q > k$, perché altrimenti la parte sinistra della curva φ_q sarebbe contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette $x = k, x = 0, y = 2, y = q$. Pertanto $a_q = -\infty$.

Si osserva che $\exists \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_q'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} h(\varphi_q(t)) = \lim_{y \rightarrow l_q} h(y) = \lim_{y \rightarrow l_q} (y - \sqrt{2y}) = l_q - \sqrt{2l_q}$; ne segue, per il teorema dell'asintoto, che $l_q - \sqrt{2l_q}$, e quindi dev'essere $l_q = 2$.

Allo scopo di ottenere informazioni su b_q ed L_q , risolviamo parzialmente l'equazione.

Si calcola: $\int_q^y \frac{1}{w - \sqrt{2w}} dw = \int_0^t d\tau$, da cui segue $t = \int_q^y \frac{1}{w - \sqrt{2w}} dw =: t(y)$.

La funzione $t = t(y)$ non è che l'inversa di φ_q .

Si vede che $\forall y > q \exists t(y) \in \mathbb{R}$, cosicché $L_q = +\infty$.

Inoltre risulta $b_q = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_q^y \frac{1}{w - \sqrt{2w}} dw = \int_q^{+\infty} \frac{1}{w - \sqrt{2w}} dw = +\infty$.

Ponendo $y = \varphi_q(t)$, da $y' = y - \sqrt{2y}$ segue che $y'' = (1 - \frac{1}{\sqrt{2y}})y'$, da cui ancora $y'' > 0$, essendo $y' > 0$. Ciò implica che φ_q è convessa in $] -\infty, b_q[$.

-) Se decidessimo di calcolare l'integrale e portare a termine la risoluzione dell'equazione, troveremmo che, $\forall q \in \mathbb{R}^+$, la soluzione del pdC con dato iniziale $y(0) = q$ è $\varphi_q(t) = \frac{1}{2}(2 + (\sqrt{2q} - 2)e^{-\frac{t}{2}})^2$, con $2 + (\sqrt{2q} - 2)e^{-\frac{t}{2}} > 0$, e da qui potremmo ritrovare tutti i precedenti risultati.

Esempio 1.3. Consideriamo l'equazione $y' = 3y - y^2$.

-) Posto $h(y) = 3y - y^2$, si vede che $h \in C^1(\mathbb{R})$, per cui h è local/te lipschitziana in \mathbb{R} . Invece la condizione che esistano $p, q \in [0, +\infty[$ tali che $\forall y \in \mathbb{R} |h(y)| \leq p + q|y|$ non è soddisfatta, per cui non è detto che le soluzioni siano definite in tutto \mathbb{R} .

Per ogni $q \in \mathbb{R}$ indichiamo con φ_q la soluzione che soddisfa il dato iniziale $y(0) = q$, definita in $]a_q, b_q[$, dove $-\infty \leq a_q < 0 < b_q \leq +\infty$.

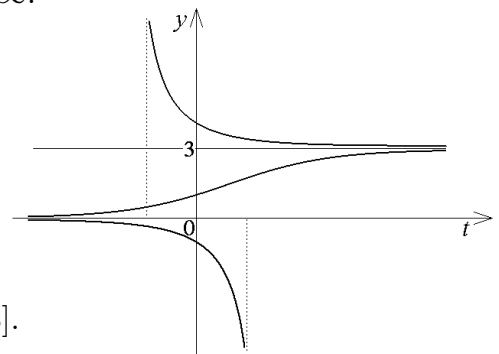
-) L'equazione ammette le soluzioni stazionarie $y(t) = 0$ e $y(t) = 3, t \in \mathbb{R}$.

-) Sia $0 < q < 3$. La curva φ_q è tutta contenuta nella striscia $0 < y < 3$.

Poiché $\varphi_q'(0) = h(q) > 0$, φ_q è strett/te crescente. Ne segue che, posto $\text{Im}(\varphi_q) =]l_q, L_q[$, risulta $l_q = \lim_{t \rightarrow a_q} \varphi_q(t) \in [0, q[$ e $L_q = \lim_{t \rightarrow b_q} \varphi_q(t) \in]q, 3]$.

Non è possibile che esista $k \in \mathbb{R}$ t.c. $b_q < k$, perché

altrimenti la parte destra della curva φ_q sarebbe contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette $x = 0, x = k, y = q, y = 3$. Pertanto $b_q = +\infty$.



Si osserva che $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'_q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(\varphi_q(t)) = \lim_{y \rightarrow L_q} h(y) = \lim_{y \rightarrow L_q} (3y - y^2) = 3L_q - L_q^2$; ne segue, per il teorema dell'asintoto, che $3L_q - L_q^2 = 0$, e quindi dev'essere $L_q = 3$. In modo analogo si dimostra che $a_q = -\infty$ e che $l_q = 0$.

Ponendo $y = \varphi_q(t)$, da $y' = 3y - y^2$ segue che $y'' = y'(3 - 2y)$, da cui si deduce che $y'' > 0$ per $y < \frac{3}{2}$, essendo $y' > 0$. Ciò implica che φ_q è prima convessa e poi concava, con un flesso ad altezza $\frac{3}{2}$.

-) Sia $q > 3$. La curva φ_q è tutta contenuta nel semipiano $y > 3$.

Poiché $\varphi'_q(0) = h(q) < 0$, φ_q è strett/te decrescente. Ne segue che, posto $\text{Im}(\varphi_q) =]l_q, L_q[$, risulta $l_q = \lim_{t \rightarrow a_q} \varphi_q(t) \in]3, q[$ e $L_q = \lim_{t \rightarrow b_q} \varphi_q(t) \in]q, +\infty[$.

Non è possibile che esista $k \in \mathbb{R}$ t.c. $b_q < k$, perché altrimenti la parte destra della curva φ_q sarebbe contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette $x = 0$, $x = k$, $y = 3$, $y = q$. Pertanto $b_q = +\infty$.

Si osserva che $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'_q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(\varphi_q(t)) = \lim_{y \rightarrow l_q} h(y) = \lim_{y \rightarrow l_q} (3y - y^2) = 3l_q - l_q^2$; ne segue, per il teorema dell'asintoto, che $3l_q - l_q^2 = 0$, e quindi dev'essere $l_q = 3$.

Allo scopo di ottenere informazioni su a_q ed L_q , risolviamo parzialmente l'equazione.

Si calcola: $\int_q^y \frac{1}{3w-w^2} dw = \int_0^t d\tau$, da cui segue $t = \int_q^y \frac{1}{3w-w^2} dw =: t(y)$.

La funzione $t = t(y)$ non è che l'inversa di φ_q .

Si vede che $\forall y > q \exists t(y) \in \mathbb{R}$, cosicché $L_q = +\infty$.

Inoltre risulta $a_q = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_q^y \frac{1}{3w-w^2} dw = \int_q^{+\infty} \frac{1}{3w-w^2} dw \in \mathbb{R}$, cosicché $a_q \in \mathbb{R}$.

In modo analogo si possono riottenere i risultati $l_q = 3$ e $b_q = +\infty$.

Ponendo $y = \varphi_q(t)$, da $y' = 3y - y^2$ segue che $y'' = y'(3 - y)$, da cui ancora $y'' < 0$, essendo $y > 3$ e $y' < 0$. Ciò implica che φ_q è convessa in $]a_q, +\infty[$.

-) Sia $q < 0$. Procedendo come nel caso precedente si scopre che la soluzione φ_q è strett/te decrescente, è definita in $] -\infty, b_q[$ con $b_q \in \mathbb{R}$, ha codominio $] -\infty, 0[$ ed è concava.

-) Se decidessimo di calcolare l'integrale per completare la risoluzione, troveremmo che, $\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, la soluzione del pdC con dato iniziale $y(0) = q$ è $\varphi_q(t) = \frac{3q}{q+(3-q)e^{-3t}}$, e da qui potremmo ritrovare tutti i precedenti risultati.

Alla luce degli esempi trattati, possiamo presentare alcuni risultati di carattere generale. Ribadiamo che, per ogni $q \in J$, si indica con φ_q la soluzione che verifica il dato $y(0) = q$, e si indica con $]a_q, b_q[$ l'intervallo in cui essa è definita.

-) Sia $h(q) > 0$. In questo caso φ_q è strett/te crescente.

Se h ha zeri in J minori di q , detto \bar{y} il più grande di essi, si ha che $a_q = -\infty$ e $\inf \varphi_q = \bar{y}$. Se invece h non ha zeri in J minori di q , allora a_q può essere finito o infinito e $\inf \varphi_q = \inf J$.

Risultati analoghi valgono per b_q e per $\sup \varphi_q$.

-) Sia $h(q) < 0$. I risultati sono simili a quelli presentati nel caso precedente.

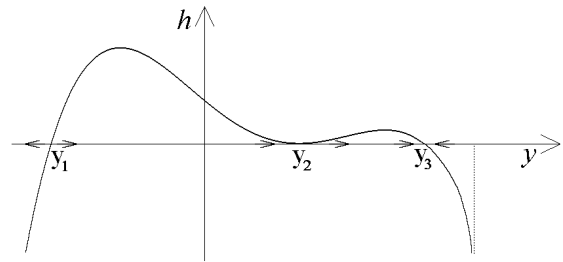
-) Sia $h(q) = 0$. In questo caso φ_q è costante, con $a_q = -\infty$ e $b_q = +\infty$.

Se esiste U intorno di q t.c., $\forall p \in U$, $h(p) > 0$ per $p < q$ e $h(p) < 0$ per $p > q$ (ciò accade ad esempio se h è derivabile in q con $h'(q) < 0$), allora $\forall p \in U \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_p(t) = q$; in altri termini, le soluzioni che partono da punti p vicini a q sopravvivono per ogni $t \geq 0$ e si avvicinano a q indef/te. Il punto critico q è detto allora *asintoticamente stabile*, oppure si dice che è *un attrattore locale*; il più grande degli intorno U con la proprietà suddetta è chiamato *bacino di attrazione*; ciascuno degli estremi del bacino di attrazione o è uno zero di h oppure è un estremo di J ; se il bacino di attrazione è tutto J , si dice che q è un *attrattore globale*.

Se esiste U intorno di q t.c., $\forall p \in U$, $h(p) < 0$ per $p < q$ e $h(p) > 0$ per $p > q$ (ciò accade ad esempio se h è derivabile in q con $h'(q) > 0$), allora le soluzioni che partono da punti vicini a q si allontanano da q al crescere di t . In tal caso il punto critico q è detto *instabile*, oppure si dice che è un *repulsore*.

Un altro caso notevole si ha quando esiste U intorno di q t.c. $h(p) > 0$ (oppure $h(p) < 0$) $\forall p \in U \setminus \{q\}$. Se accade ciò, allora le soluzioni φ_p con $p \in U$ e $p < q$ tendono a q per $t \rightarrow +\infty$, mentre le soluzioni φ_p con $p \in U$ e $p > q$ si allontanano da q al crescere di t (o viceversa): il punto critico q è instabile.

Il comportamento degli stati di equilibrio può essere illustrato mediante il cosiddetto *ritratto di fase*: si rappresenta graficamente la funzione h in un piano in cui l'asse orizzontale è quello della variabile di stato, e in prossimità degli zeri di h vengono disegnate delle frecce che stanno ad indicare l'attrattività o la repulsività.



Nella figura a lato i punti y_1 e y_2 corrispondono entrambi a situazioni instabili, mentre il punto y_3 corrisponde ad una situazione stabile; il punto y_1 è un repulsore e il punto y_3 è un attrattore, il cui bacino di attrazione è l'intervallo $]y_2, \sup J[$.

2. Sistemi autonomi del primo ordine

Consideriamo il sistema differenziale autonomo bidimensionale

$$\begin{cases} x' = g(x, y) \\ y' = h(x, y) \end{cases} \quad (*)$$

dove $x = x(t)$ e $y = y(t)$ sono le funzioni incognite e g ed h sono funzioni reali definite in A aperto connesso di \mathbb{R}^2 . Anche qui è opportuno immaginare che la variabile t rappresenti il tempo, per cui anche qui ne sarà privilegiato l'intervallo $t \geq 0$. Le funzioni g ed h non dipendono da t , ma solo da x ed y , che in questo contesto vengono chiamate *variabili di stato*. Il piano in cui variano x ed y è chiamato *piano delle fasi*.

Per soluzioni intenderemo sempre soluzioni massimali; se $\phi \equiv (x(t), y(t))$ è una soluzione, l'intervallo in cui è definita sarà indicato con I_ϕ ; ed è noto che $\phi \in C^1(I_\phi)$. La corrispondente curva integrale, ossia il grafico di ϕ , è l'insieme $\{(t, x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^3 / t \in I_\phi\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Ma, più che al grafico dell'applicazione ϕ , noi saremo interessati a considerare ϕ come una usuale curva piana e a studiarne il sostegno, vale a dire l'insieme $\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 / t \in I_\phi\}$, che è contenuto nel piano delle fasi ed è chiamato in questo contesto *orbita* o *traiettoria* del sistema differenziale. Per ogni $t \in I_\phi$, il punto $\phi(t) = (x(t), y(t))$ rappresenta lo *stato del sistema* all'istante t .

Ad un sistema autonomo del primo ordine può essere sempre ricondotta una equazione autonoma del secondo ordine: data l'equazione $x'' = l(x, x')$, nell'incognita $x = x(t)$, basta introdurre $y = x'$ e si ottiene il sistema $\begin{cases} x' = y \\ y' = l(x, y) \end{cases}$, le cui soluzioni sono tutte e sole le coppie $(x(t), x'(t))$ con $x(t)$ soluzione dell'equazione assegnata.

Per formare un pdC associato al sistema (*) occorre che siano assegnate le condizioni iniziali, che sono del tipo $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, con $t_0 \in \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$. Risolvere il pdC può essere interpretato così: nell'insieme A è assegnato un punto (x_0, y_0) ed un campo di velocità, quello che ad ogni $(x, y) \in A$ associa il vettore $V(x, y) = (g(x, y), h(x, y))$; si tratta di determinare il moto di una particella che all'istante assegnato t_0 si trova nel punto (x_0, y_0) e che in ogni punto (x, y) della traiettoria ha velocità $V(x, y)$.

Se introduciamo le notazioni vettoriali $Y = (x, y)$ e $V = (g, h)$, il sistema si scrive nella forma $Y' = V(Y)$. E' noto che, se V è local/te lipschitziana in A , come sempre supporremo, allora per ogni $(t_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times A$ passa una ed una sola curva integrale; inoltre, nel caso $A = \mathbb{R}^2$, se $\exists p, q \in [0, +\infty[$ t.c. $\forall Y \in \mathbb{R}^2 \quad |V(Y)| \leq p + q|Y|$, allora tutte le soluzioni sono definite in \mathbb{R} .

Esempio 2.1. L'equazione $x'' = -x$ ha soluzioni $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se introduciamo $y = x'$, l'equazione si trasforma nel sistema

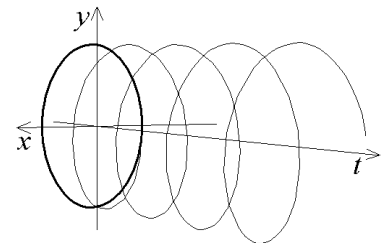
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}, \text{ le cui soluzioni sono } \begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se all'equazione abbiniamo le condizioni $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$, otteniamo $x = \cos t$.

Ciò corrisponde ad abbinare al sistema le condizioni $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, cui corrisponde la soluzione $\begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin t \end{cases}$.

Questa ha come grafico l'insieme $\{(t, \cos t, -\sin t) \in \mathbb{R}^3 / t \in \mathbb{R}\}$, che ha la forma di un' elica cilindrica.

Invece l'orbita, che si ottiene proiettando il grafico sul piano delle fasi, è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, percorsa in senso orario; all'istante $t = 0$ il sistema si trova nello stato $(x, y) = (1, 0)$, con velocità $V = (x', y') = (0, -1)$.



Se $\phi(t)$ è soluzione (in I_ϕ), allora $\forall \tau \in \mathbb{R}$ la funzione $\psi(t) = \phi(t-\tau)$ è anch'essa soluzione, definita in $I_\psi = I_\phi + \tau$; risulta infatti $\psi'(t) = \phi'(t-\tau) = V(\phi(t-\tau)) = V(\psi(t))$. Viceversa, se $\phi(t)$ e $\psi(t)$ sono soluzioni tali che $\phi(t_1) = \psi(t_2)$ per qualche $t_1 \in I_\phi$ e $t_2 \in I_\psi$, allora esiste $\tau \in \mathbb{R}$ tale che $\psi(t) = \phi(t-\tau)$, e $I_\psi = I_\phi + \tau$; infatti, posto $\tau = t_2 - t_1$ e considerata la soluzione $\chi(t) := \phi(t-\tau)$, si ha che $\chi(t_2) = \psi(t_2)$, da cui segue, per via dell'unicità, che $\chi = \psi$, intendendo con ciò che vale anche l'uguaglianza $I_\chi = I_\psi$, ossia $I_\psi = I_\phi + \tau$.

E' evidente allora che per ogni punto $(x_0, y_0) \in A$ passa una ed una sola orbita, e questa è la proiezione sul piano delle fasi di infinite soluzioni, che sono tutte e sole le funzioni ottenibili traslando lungo l'asse dei tempi l'unica soluzione soddisfacente le condizioni iniziali
$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Vedremo adesso che le orbite possono essere solo di tre tipi: punti di equilibrio, cicli e curve semplici aperte.

I *punti stazionari*, o *critici* o *di equilibrio*, detti anche *stati stazionari*, o *critici* o *di equilibrio*, sono gli zeri della funzione $V(x, y)$: se $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ è tale che $V(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$, allora la funzione costante $\phi(t) = (\bar{x}, \bar{y})$, $t \in \mathbb{R}$, è soluzione del sistema (dato che, $\forall t \in \mathbb{R}$, risulta $\phi'(t) = (0, 0) = V(\bar{x}, \bar{y}) = V(\phi(t))$), ed è chiamata *soluzione di equilibrio* o *soluzione stazionaria*. In sostanza, se il sistema, in un dato istante, ad esempio $t = 0$, si trova nello stato di equilibrio (\bar{x}, \bar{y}) , rimane in questo stato per tutto il tempo che segue. Il grafico della soluzione di equilibrio è una retta parallela all'asse dei tempi, e la sua orbita è un punto del piano della fasi, giusto il punto di equilibrio (\bar{x}, \bar{y}) .

Per quanto detto innanzi è evidente che nessuna altra orbita può passare per il punto critico (\bar{x}, \bar{y}) ; ma non è escluso che qualche orbita si avvicini ad esso indef/te. Ciò accade ad esempio se la soluzione non costante ϕ è tale che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = (\bar{x}, \bar{y})$. Anzi, se una soluzione non costante $\phi(t) = (x(t), y(t))$ è tale che $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = (\bar{x}, \bar{y}) \in A$, allora (\bar{x}, \bar{y}) è un punto di equilibrio. Ciò è conseguenza del teorema dell'asintoto applicato alle funzioni $x(t)$ e $y(t)$; infatti esse ammettono limite finito per $t \rightarrow +\infty$ e le loro derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ hanno limite rispet/te $g(\bar{x}, \bar{y})$ ed $h(\bar{x}, \bar{y})$ (essendo $x'(t) = g(x(t), y(t))$ e $y'(t) = h(x(t), y(t))$), cosicché deve risultare $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ e $h(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

I *cicli* sono le orbite chiuse, corrispondenti a soluzioni periodiche. Una soluzione periodica ϕ è una soluzione definita in \mathbb{R} e tale che per qualche $T \in \mathbb{R}^+$ risulta $\phi(t+T) = \phi(t) \forall t \in \mathbb{R}$. E' noto che, data la continuità di ϕ , se ϕ è periodica, allora l'insieme dei suoi periodi, cioè dei numeri positivi T con la proprietà suddetta, ammette minimo; e in genere, quando si dice che ϕ è periodica di periodo T , come periodo T si intende proprio questo minimo.

Si dimostra che, se in due istanti diversi il sistema ripassa sul medesimo punto, allora l'orbita è periodica. In altri termini, se ϕ è una soluzione tale che $\phi(t_1) = \phi(t_2)$, con $t_1 < t_2$, allora $I_\phi = \mathbb{R}$ e ϕ è periodica. Infatti, posto $T = t_2 - t_1$, è noto che la funzione $\psi(t) = \phi(t-T)$ è soluzione, in $I_\psi = I_\phi + \tau$; e, poiché risulta $\psi(t_2) = \phi(t_2)$, dovrà essere

$\psi = \phi$. Ciò comporta che $I_\phi + \tau = I_\phi$, il che accade se e solo se $I_\phi = \mathbb{R}$. Inoltre T è un periodo per ϕ , essendo $\forall t \in \mathbb{R} \phi(t+T) = \psi(t+T) = \phi(t)$. Infine, se t_2 è il primo degli istanti t successivi a t_1 tali che $\phi(t) = \phi(t_1)$, allora ϕ è periodica di periodo $T = t_2 - t_1$, e l'orbita relativa alla soluzione ϕ è la curva semplice e chiusa $\phi = \phi(t)$ con $t \in [0, T]$. Ogni ciclo divide l'insieme A in due regioni, una interna e una esterna. Ogni orbita che nasce all'interno di un ciclo vi resta intrappolata per sempre, così come ogni orbita che nasce all'esterno resta sempre esterna. Un'orbita può avvicinarsi indef/te ad un ciclo, ma senza mai toccarlo, ad esempio con infiniti avvolgimenti che lo approssimano sempre meglio (nel qual caso il ciclo è detto *ciclo limite*).

Se escludiamo i punti di equilibrio e i cicli, non restano che le curve aperte come possibili altre orbite, le quali non possono non essere semplici in virtù di quanto osservato poc'anzi circa i sistemi che ritornano una seconda volta su un medesimo stato.

Ritorniamo ora al caso dei punti di equilibrio, che, come s'è già visto per le equazioni, possono essere classificati in base alla stabilità. Prenderemo in esame soltanto i punti di equilibrio *isolati*, ossia quelli che ammettono un intorno in cui non cadono altri punti di equilibrio. Per comodità, indicheremo con p (o con q) un generico punto di A , e con ϕ_p (o con ϕ_q) la soluzione che all'istante $t = 0$ si trova in p (o in q).

Un punto critico q si dice *stabile* se $\forall U \in \mathcal{I}(q) \exists U' (\subseteq U) \in \mathcal{I}(q)$ tale che, $\forall p \in U'$ la soluzione ϕ_p esiste per ogni $t \geq 0$ e risulta $\phi_p(t) \in U \forall t \geq 0$.

Se a ciò si aggiunge la proprietà che $\exists \tilde{U} \in \mathcal{I}(q)$ tale che $\forall p \in \tilde{U}$ la soluzione

ϕ_p esiste per ogni $t \geq 0$ e risulta $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_p(t) = q$, allora il punto di equilibrio q è detto *asintoticamente stabile*. In altri termini, un punto di equilibrio è stabile se le orbite che partono da punti vicini ad esso rimangono vicine, asintot/te stabile se queste orbite non solo si mantengono vicine, ma la loro distanza dal punto tende a zero per t tendente all'infinito. In quest'ultimo caso il punto critico è detto essere *un attrattore locale*, e il più grande degli intorni \tilde{U} con la proprietà suddetta è chiamato *bacino di attrazione*; se il bacino di attrazione è tutto A , si dice che q è un *attrattore globale*.

Un punto critico isolato q che non sia stabile si dice *instabile*; ciò vuol dire essenzialmente che esiste un intorno di q dal quale qualche orbita, pur partendo da un punto vicino a q quanto si vuole, fuoriesce almeno per qualche istante.

