Quesiti tratti da una simulazione dell'Esame di Analisi Matematica

assegnata nel Politecnico di Torino[1]

Quesito 12

Se f ha sviluppo di Taylor $f(x)=2-3(x-2)-5(x-2)^2+(x-2)^3+o(x-2)^3$ per x→2, allora in un intorno di x=2

a) f è negativa, crescente e concava
b) f è negativa, crescente e convessa
c) f è negativa, decrescente e convessa
d) f è positiva, crescente e concava
e) f è negativa, decrescente e convessa

Risoluzione del quesito

Per valutare la veridicità delle affermazioni riportate e individuare quella esatta sul comportamento della funzione in "un opportuno intorno $I(2)$ del punto x=2" si devono determinare i segni della funzione, della sua derivata prima e della sua derivata seconda nel suddetto intorno. Ciò si consegue calcolando i valori $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$ e applicando opportunamente il **teorema della permanenza del segno.** Infatti**,** ricordiamo che sussiste il seguente **Teorema (sulla continuità)**: se una funzione in un punto è derivabile allora ivi è anche continua.

Ciò premesso, osserviamo che se nel punto x_0 una funzione è derivabile allora ivi è anche continua; se esiste in x_0 la derivata seconda allora in detto punto la funzione derivata prima è continua; se esiste in x_0 la derivata terza allora in detto punto la funzione derivata seconda è continua. Ebbene, dallo sviluppo di Taylor di punto iniziale x=2 fornito si evince che esistono le derivate fino a quella del terzo ordine della funzione nel punto x=2 , quindi sono applicabili sia il **teorema sulla continuità**, sia quello della permanenza del segno in "un opportuno intorno $I(2)$" per le funzioni $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.

Tutto ciò premesso, dallo sviluppo di Taylor della funzione deduciamo che:

1. per quanto riguarda il segno della funzione, poiché $f(2)=2>0$, per il teorema della permanenza del segno applicato alla funzione si conclude che in un opportuno intorno $I_1(2)$ di x=2 la funzione ***f* è positiva**;
2. per quanto riguarda il segno della derivata prima, poiché risulta $f'(x)=-3-10(x-2)+3(x-2)^2+o(x-2)^2$, quindi $f'(2)=-3<0$, si può affermare, sempre per il teorema della permanenza del segno, che in un opportuno intorno $I_2(2)$ di x=2 risulterà negativa la funzione derivata prima, quindi ivi la funzione ***f* sarà strettamente decrescente**;
3. per quanto riguarda il segno della derivata seconda, poiché risulta $f''(x)=-10+6(x-2)+o(x-2)$ e quindi $f''(x)=-10<0$, si può affermare che in un opportuno intorno $I_3(2)$ di x=2 sarà negativa la funzione derivata seconda, quindi ivi la **funzione *f* è concava**.

[1] Quesiti tratti dalla Simulazione 04_4° del Prof Serra Politecnico di Torino

Se ora consideriamo come intorno del punto x=2 quello dato dall'intersezione dei tre intorni precedentemente determinati $I(2)=I_1(2)\cap I_2(2)\cap I_3(2)$ evidentemente in esso sussistono le tre proprietà precisate per la funzione $\boldsymbol{f}$ per cui la risposta corretta fra le cinque proposte è quella contrassegnata con *d*)[2].

*** ***

Quesito 15

Il polinomio di MacLaurin di ordine 3 della funzione $f(x)=e^{\sqrt{1+3x^3}}$ è

a) $1+\frac{3}{2}x^3$

b) $e+\frac{3e}{2}x^3$

c) $2+\frac{1}{2}x^3$

d) $1+\frac{e}{2}x^3$

e) $1+\frac{1}{5}x^3$

Risoluzione del quesito

Ricordiamo che per definizione il polinomio del terzo ordine di MacLaurin relativo alla funzione $f(x)$ è il seguente

$$P(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Per poterlo scrivere occorrono i valori della funzione e quelli delle derivate dei primi tre ordini della stessa nel punto x=0.

Prima di procedere facciamo notare che la funzione è definita per i valori reali di x tali che $1+3x^3\geq 0$, quindi per ogni $x\geq-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; osserviamo che il punto x=0 è interno al dominio di definizione. Eseguendo le necessarie elaborazioni riconosceremo che la funzione in esame ammette nel punto x=0 certamente le derivate richieste. Determiniamo le derivate richieste.

$f(x)=e^{\sqrt{1+3x^3}}$, risulta $f(0)=e$;

$$f'(x)=e^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\frac{9x^2}{2\sqrt{1+3x^3}}\to f'(0)=0\,;$$

[2] Precisiamo che su alcuni testi di analisi matematica la dizione "**funzione strettamente crescente in x_0** " è riportata semplicemente come "**funzione crescente in x_0**".

$$f''(x)=e^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\left(\frac{9x^2}{2\sqrt{1+3x^3}}\right)^2+e^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\frac{18x\cdot2\sqrt{1+3x^3}-9x^2\cdot2\cdot\frac{9x^2}{2\sqrt{1+3x^3}}}{\left(2\sqrt{1+3x^3}\right)^2}=e^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\frac{81x^4}{4\left(1+3x^3\right)}+$$

$$9e^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\frac{4x\cdot\left(1+3x^3\right)-9x^4}{4\left(1+3x^3\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{9}{4}xe^{\sqrt{1+3x^3}}\left[\frac{9x^3}{\left(1+3x^3\right)}+\frac{\left(3x^3+4\right)}{\left(1+3x^3\right)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{9}{4}xe^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\frac{9x^3\sqrt{1+3x^3}+\left(3x^3+4\right)}{\left(1+3x^3\right)^{\frac{3}{2}}}\rightarrow f''(0)=0$$

Per calcolare $f'''(0)$, onde evitare inutili e complesse elaborazioni algebriche, scriviamo in forma diversa l'espressione della funzione derivata seconda. Poniamo

$f''(x)=\frac{9}{4}x\cdot\varphi(x)$, evidentemente con $\varphi(x)=e^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\frac{9x^3\sqrt{1+3x^3}+\left(3x^3+4\right)}{\left(1+3x^3\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Per la **funzione derivata terza** si ha:

$f'''(x)=\frac{9}{4}\left[1\cdot e^{\sqrt{1+3x^3}}\cdot\frac{9x^3\sqrt{1+3x^3}+\left(3x^3+4\right)}{\left(1+3x^3\right)^{\frac{3}{2}}}+x\cdot\varphi'(x)\right]$ e quindi

$$f'''(0)=\frac{9}{4}\left[1\cdot e\cdot\frac{4}{1}+0\cdot\varphi'(0)\right]=\frac{9}{4}[4e+0]=9e$$

Possiamo ora scrivere il polinomio di MacLaurin del terzo ordine richiesto. Risulta

$$P(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=e+0x+0x^2+\frac{9e}{6}x^3=e+\frac{3e}{2}x^3$$

Conclusione

La risposta esatta tra le cinque proposte è b).

*** ***

Quesito 18

La funzione $F(x)=\int_0^x t^4\cos^4(t)\,dt$

a) è crescente su R
b) è crescente solo su (0,+∞)[3]
c) è crescente solo su (-∞,0)
d) è sempre positiva
e) non si annulla mai

Risoluzione del quesito

[3] Ricordiamo che alcuni autori indicano gli intervalli aperti]*a*;+∞[,] -∞;*a* [, con *a*∈R, rispettivamente con i simboli (*a*,+∞), (-∞,*a*).

Si tratta di individuare quale delle cinque proprietà elencate è propria della funzione integrale F(x). A tal proposito osserviamo quanto segue.

1. La funzione integranda è definita su tutto l'asse reale ed è non negativa.
2. La funzione integranda è integrabile in ciascun intervallo chiuso e limitato [a;b] e il valore dell'integrale definito $\int_a^b x^4 \cos^4(x)dx$ è positivo se $a<b$, mentre è negativo se $b<a$.
3. Fissato un qualsiasi punto reale x_0 la funzione integrale di punto iniziale x_0 : $F(x)=\int_{x_0}^{x} t^4 \cos^4(t)dt$ è derivabile in ogni punto $x \in$R e la sua derivata prima è proprio la funzione integranda $f(x)=x^4\cos^4(x)$. Poiché questa funzione è non negativa e i punti in cui si annulla sono isolati (costituiscono un insieme discreto di punti) si deduce che **la funzione integrale è strettamente crescente su tutto R**.

Conclusione

La funzione $F(x)$ è strettamente crescente su tutto R. La risposta esatta tra quelle proposte è a).