Confronto di infiniti

applicazione della formula di Stirling[1]

Premessa

Per formula di Stirling si intende la seguente approssimazione numerica

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\text{ , per } n\to+\infty$$

il che significa che sussiste il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}=1$$

*** ***

Esercizio

Confrontare per $n\to+\infty$ gli infiniti dei termini $a_n=3n^2+n-1$, $b_n=\binom{n}{2}$, $c_n=\sqrt[n]{n!}$.

Elaborazioni

Ricordiamo che il valore del coefficiente binomiale b_n è il seguente $b_n=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

Confrontiamo prima a_n e b_n studiando il limite del loro rapporto. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n-1}{\frac{n(n-1)}{2}}=2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n-1}{n^2-n}=2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}=6$$

avendo ottenuto un valore finito diverso da zero si conclude che per $n\to+\infty$ gli infiniti a_n , b_n hanno lo stesso comportamento, precisamente sussiste l'approssimazione numerica $a_n\simeq 6\cdot b_n$; i due infiniti hanno ordine 2.

Confrontiamo ora b_n e $c_n=\sqrt[n]{n!}$

Tenendo conto dell'approssimazione di Stirling per il limite del rapporto b_n/c_n si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{c_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)}{2\cdot\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)}{2\cdot\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)}{2\cdot\sqrt[n]{n^n}\cdot\sqrt[n]{e^{-n}}\cdot\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}(n-1)}{2\cdot\cancel{n}\cdot e^{-1}\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}}=$$

$$\frac{e}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{\sqrt[2n]{2\pi n}}=\frac{e}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}}$$

---

[1] James Stirling (1692-1770), matematico scozzese

Osserviamo che al denominatore si presenta la forma indeterminata ∞^0 che affrontiamo passando per la stessa alla forma esponenziale-logaritmica

$$(2\pi n)^{\frac{1}{2n}} = e^{\ln\left((2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\right)} = e^{\frac{1}{2n}\cdot\ln(2\pi n)}$$

quindi si tratta di studiare il limite $\frac{e}{2}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{e^{\frac{1}{2n}\cdot\ln(2\pi n)}}$

Per quanto concerne il limite all'esponente del denominatore possiamo affermare che vale zero, infatti il denominatore è un infinito di ordine 1 mentre il numeratore è un infinito che non ha ordine ma è inferiore a qualsiasi ordine r>0 prestabilito. In effetti, passando al continuo e applicando la regola di de l'Hôpital si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2\pi x)}{2x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\pi x}\cdot 2\pi}{2\cdot 1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0\,.$$

Tornando al limite in esame si ha

$$\frac{e}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{e^{\frac{1}{2n}\cdot\ln(2\pi n)}}=\frac{e}{2}\cdot\frac{+\infty}{e^0}=\frac{e}{2}\cdot\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

Notiamo a questo punto che il limite del termine $c_n=\sqrt[n]{n!}$ per $n\to+\infty$ vale $+\infty$. Infatti risulta:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot e^{-1}\cdot\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}\right)=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}n\cdot(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}=\frac{1}{e}\cdot\lim_{n\to+\infty}n\cdot e^{\frac{1}{2n}\cdot\ln(2\pi n)}=$$
$$\frac{1}{e}(+\infty)\cdot e^0=+\infty$$

Dunque c_n è un infinito di ordine uno, precisamente è equivalente all'infinito $\frac{n}{e}$ e perciò è un infinito di ordine inferiore ai due infiniti a_n , b_n , entrambi del secondo ordine, come già precisato.