Studio di due integrali doppi

Primo integrale

Calcolare il seguente integrale doppio $\iint_E \frac{|y|}{x^2+y^2}dxdy$

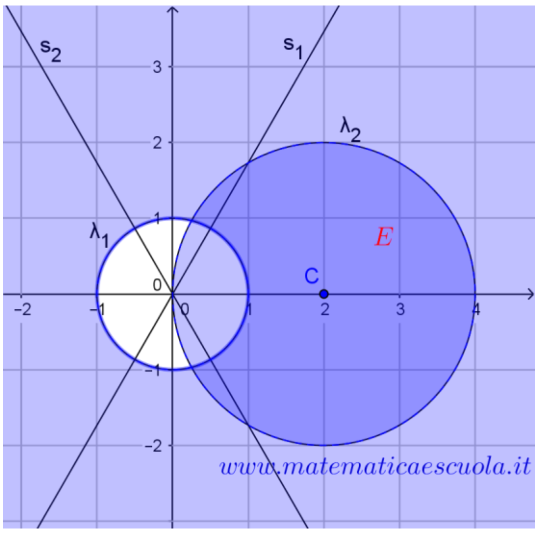
essendo E il dominio $E=\left\{(x;y)\in R^2 \middle| \left(1\le x^2+y^2\le 4x\right)\wedge |y|\le\sqrt{3}x\right\}$.

Elaborazioni

1) Il dominio E è la parte finita di piano contenuta nel primo e quarto quadrante avente come frontiera un arco della circonferenza $\lambda_1: x^2+y^2=1$, che ha come centro l'origine degli assi cartesiani e raggio unitario, un arco della circonferenza $\lambda_2: x^2+y^2-4x=0$, che ha centro nel punto C(2;0) e raggio 2, dal segmento della semiretta $s_1: y=\sqrt{3}x$ i cui estremi sono i punti in cui questa incontra nel primo quadrante le due circonferenze λ_1, λ_2 e dal segmento della semiretta $s_2: y=-\sqrt{3}x$ i cui estremi sono i punti in cui questa incontra nel quarto quadrante le due circonferenze λ_1, λ_2. I punti della frontiera indicata fanno tutti parte del dominio E, quindi questo è chiuso e limitato.

2) La funzione integranda nell'insieme E è continua e assume valori non negativi; poiché E è chiuso e limitato il valore dell'integrale da calcolare è un numero positivo.

3) Osserviamo che E non è un dominio normale rispetto all'asse delle ascisse e per questo motivo per il calcolo dell'integrale passiamo alle coordinate polari. Poniamo $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho sen\theta$.



Ricaviamo le equazioni delle due circonferenze.

$\lambda_1: x^2+y^2=1 \to \lambda_1: \rho^2\cos^2\theta+\rho^2 sen^2\theta=1$
$\to \lambda_1: \rho=1;$

$\lambda_2: x^2+y^2-4x=0 \to$
$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2 sen^2\theta-4\rho\cos\theta=0 \to$
$\rho(\rho-4\cos\theta)=0$

Dei punti di λ_2 solo all'origine O(0;0) corrisponde il valore $\rho=0$, per tutti gli altri risulta $\rho\neq 0$; del resto i punti dell'arco di λ_2 appartenenti alla frontiera di E non comprendono l'origine, quindi l'equazione polare dell'arco di λ_2 cui siamo interessati ha equazione $\rho=4\cos\theta$, con ρ variabile dal valore minimo 1 al valore massimo 4. Per quanto concerne la variabilità dell'angolo θ notiamo che dai coefficienti angolari delle due semirette s_1, s_2 deduciamo che $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$. Ebbene, un qualsiasi punto P del dominio E ha coordinate polari (ρ;θ), con $1 \le \rho \le 4\cos\theta$ e $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$.

4) **Calcolo dell'integrale doppio**

Facciamo presente che il calcolo effettivo dell'integrale doppio con le nuove coordinate (polari) oltre che richiedere l'espressione della funzione integranda tramite le nuove variabili, è necessario moltiplicare detta espressione per il **modulo dello Jacobiano** che ricordiamo è

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho sen\theta \\ sen\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

Inoltre, possiamo limitare la variabilità dell'angolo θ all'intervallo $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ perché sia il dominio E, sia la funzione integranda sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse: per ogni punto P'(x;y) del dominio E anche il punto P''(x;-y) appartiene al dominio e la funzione verifica la proprietà f(x;y)=(f(x;-y).

Per questi motivi possiamo scrivere

$$f(x;y) = \frac{|y|}{x^2+y^2} \to f\left(x(\rho;\theta);y(\rho;\theta)\right) = \frac{|\rho sen\theta|}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2 sen^2\theta} = \frac{\rho|sen\theta|}{\rho^2} = \frac{|sen\theta|}{\rho};$$

considerare come dominio di integrazione in coordinate polari il sottoinsieme di R^2

$$D = \left\{(\rho;\theta) \middle| (1 \le \rho \le 4\cos\theta) \wedge \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

scrivendo

$$\iint_E \frac{|y|}{x^2+y^2}dxdy = 2\iint_D \frac{|sen\theta|}{\rho}\cdot\rho d\rho d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{\rho=1}^{4\cos\theta} sen\theta d\rho\right)d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} sen\theta\left(\int_{\rho=1}^{4\cos\theta} d\rho\right)d\theta =$$

$$2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} sen\theta\left([\rho]_1^{4\cos\theta}\right)d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} sen\theta(4\cos\theta-1)d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} 4sen\theta\cos\theta d\theta - 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} sen\theta d\theta =$$

$$-2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} -2sen(2\theta)d\theta + 2[\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = -2[\cos(2\theta)]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2[\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = -2\left[\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) - \cos(0)\right] +$$

$$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(0)\right] = -2\left[-\frac{1}{2}-1\right] + 2\left[\frac{1}{2}-1\right] = 3-1 = 2$$

*** ***

Secondo integrale [1]

Calcolare il seguente integrale doppio

$\iint_E \frac{|y|}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy$, sempre con $E=\left\{(x;y)\in R^2 \middle| \left(1\le x^2+y^2\le 4x\right)\wedge |y|\le\sqrt{3}x\right\}$

Osservazione

Per il calcolo dell'integrale proposto valgono tutte le considerazioni svolte nel calcolo dell'integrale dell'esercizio precedente; la differenza consiste solo nella diversa forma analitica della funzione integranda.

Riporto il calcolo senza ulteriori precisazioni.

Elaborazioni

$$2\iint_D \frac{|sen\theta|}{\rho^3}\cdot\rho d\rho d\theta=\iint_E \frac{|y|}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy=2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{\rho=1}^{4\cos\theta}\frac{sen\theta}{\rho^2}d\rho\right)d\theta=$$

$$2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}sen\theta\left(\int_{\rho=1}^{4\cos\theta}\rho^{-2}d\rho\right)d\theta=2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}sen\theta\left(\left[-\frac{1}{\rho}\right]_1^{4\cos\theta}\right)d\theta=2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}sen\theta\left(-\frac{1}{4\cos\theta}+1\right)d\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{-sen\theta}{\cos\theta}d\theta+2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}sen\theta d\theta=\frac{1}{2}\left[\ln(\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+2\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(1)\right]+$$

$$2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+1\right]=\frac{1}{2}\left(-\ln(2)\right)+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(2-\ln(2)\right)\simeq 0,6534$$

[1] Esercizio assegnato nel compito di Analisi matematica II, C.d.L. in Ing. dell'Informazione, Lecce, il 13-02-2013