Studio di funzione

Studiare la funzione[1] così definita

$$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}+|x+1|$$

Elaborazioni

1. Classificazione della funzione e dominio

La funzione è trascendente esponenziale fratta e mista. Infatti è la somma di una funzione esponenziale con il modulo di un polinomio di primo grado. La funzione è definita per tutti i valori reali che non annullano il denominatore della frazione: $e^x-1\neq 0$, quindi $\forall x\neq 0$. $D=\mathbb{R}-\{0\}$.

2. Segno, zeri, limiti e asintoti

Esplicitiamo la funzione in relazione al segno dell'argomento del modulo. Risulta:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}-x-1 & per \quad x<0\\ \dfrac{e^x+1}{e^x-1}+x+1 & per \quad x>0\end{cases}$$

Osserviamo che per x>0 i due termini che compongono la funzione assumono valori positivi, dunque f(x)>0. Per x<0 la frazione può assumere valori sia positivi, sia negativi, mentre l'altro termine si annulla solo per x=-1 e per il resto assume valori positivi. Poiché si riconosce velocemente che

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty \text{, nonché } \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty, \tag{2.1}$$

si deduce che esiste almeno un intorno sinistro del punto x=0 in cui la funzione è negativa. Ancora risulta

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}+x+1\right)=\frac{1+1}{1^+-1}+1=\frac{2}{0^+}+1=+\infty$; dunque l'asse delle ordinate è asintoto verticale da destra e da sinistra per il grafico della funzione.

Limiti per $x\to\pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-x-1\right)=\frac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1}-(-\infty)-1=\frac{0+1}{0-1}+\infty=+\infty; \tag{2.2}$$

[1] Funzione assegnata nella prova d'esame di Analisi Matematica il 30-01-2017 nel corso di Laurea in Scienze dei materiali - Bari

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}+x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(1+e^{-x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1-e^{-x}\right)}+\lim_{x\to+\infty}(x+1)=\frac{1+0}{1-0}+\infty=+\infty$$

La funzione non è limitata superiormente, né inferiormente e per x→∞ il suo grafico non ha asintoti orizzontali.

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)\cdot\frac{1}{x}+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right]=1\cdot 0+1+0=1=m_1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)\cdot\frac{1}{x}-\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right]=-1\cdot 0-1+0=-1=m_2$$

Si devono studiare due ulteriori limiti.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-m_1x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}+x+1-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}+1\right)=2$$

La retta s_1:y=x+2 è asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-m_2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-x-1+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-1\right)=-2$$

La retta s_2:y=-x-2 è asintoto

Osserviamo a questo punto che nell'intervallo]- ∞;0[la funzione è continua e che i valori dei limiti (2.1), (2.2) implicano che la funzione, per il teorema di esistenza degli zeri, si deve annullare in almeno un punto x= α interno all'intervallo. Con il successivo studio della monotonia si dedurranno ulteriori informazioni circa l'esistenza di ulteriori zeri della funzione.

3. Monotonia, massimi e minimi relativi

Abbiamo già precisato che la funzione non è limitata superiormente, né inferiormente, quindi non ammette né massimo, né minimo assoluti. Con lo studio e il segno della derivata prima intendiamo riconoscere se esistono punti di massimo o di minimo relativo (locali).

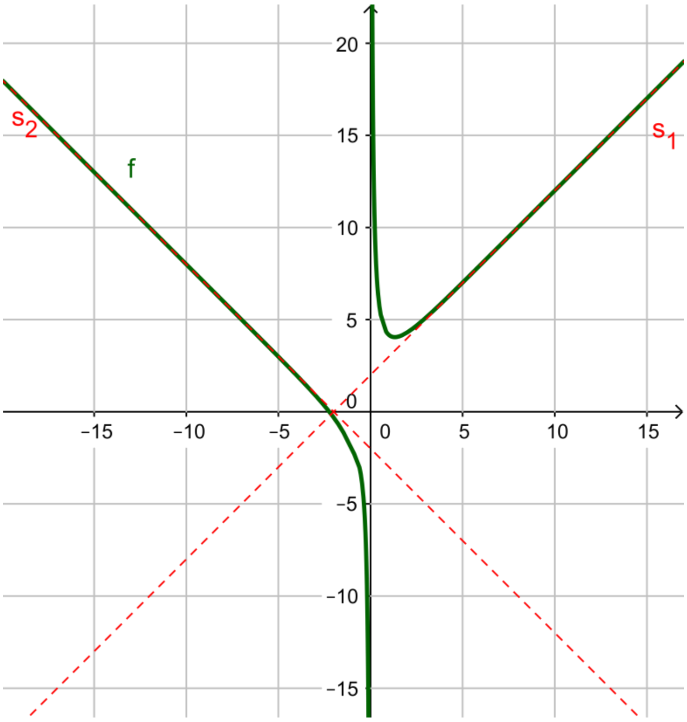
Per x>0 risulta

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}+1=\ldots=\frac{e^{2x}-4e^x+1}{\left(e^x-1\right)^2};$$

$f'(x)\geq 0 \iff e^{2x}-4e^x+1\geq 0\to\left(e^x\right)^2-4e^x+1\geq 0$. Risolvendo l'equazione associata $t^2-4t+1=0$ si hanno le due radici reali $t=2\pm\sqrt{3}$, entrambe positive, quindi la disequazione è soddisfatta per i valori di x positivi tali che $\left(e^x\leq 2-\sqrt{3}\right)\vee\left(e^x\geq 2+\sqrt{3}\right)$. La prima disuguaglianza non ha soluzioni per x>0, mentre la seconda è soddisfatta per $x \geq \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. Pertanto, nell'intervallo]0;+∞[la funzione ha derivata prima negativa nell'intervallo $0 < x < \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$, dove perciò è strettamente decrescente, e derivata prima positiva per $x > \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$, dov'è strettamente crescente. Il punto $x = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ $\simeq 1{,}317$ è di minimo relativo proprio con

$$f\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 1 \ldots = \sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 1 \simeq 4{,}049$$ (valore del minimo relativo).

Per x<0 la derivata prima è $f'(x) = -\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x-1\right)^2}$, che assume solo valori negativi, quindi nell'intervallo]-∞;0[la funzione è strettamente decrescente. Questa caratteristica della funzione permette di affermare che nell'intervallo in esame la funzione ammette solo uno zero, quindi che il suo diagramma attraversa l'asse delle ascisse in un solo punto: sia esso x= α.



Si possono determinare delle approssimazioni di α utilizzando il metodo di bisezione o altri strumenti di ricerca. Osservato che f(-3) ≈0,89 e f(-2) ≈-0,31 affermiamo che -3<α<-2. Ricerche più accurate permettono di ottenere per lo zero l'approssimazione α≈-2,24.

4. **Concavità, convessità ed eventuali flessi**

Per la funzione derivata seconda si ha:

per x<0, $f''(x) = 2\frac{e^{2x}+e^x}{\left(e^x-1\right)^3}$, che è negativa, quindi per x<0 la funzione è concava, cioè il suo diagramma volge la concavità verso il basso;

per x>0 risulta $f''(x) = \frac{2e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x-1\right)^3}$, che per x>0 assume solo valori positivi, pertanto la concavità della funzione nell'intervallo è rivolta verso l'alto (la funzione è convessa).

Dallo studio emerge che non annullandosi la derivata seconda in alcun punto la funzione in oggetto non presenta punti di flesso.

Il diagramma della funzione è riportato in figura.