Equazioni differenziali del secondo ordine autonome

Definizione

Si dice autonoma un'equazione differenziale del secondo ordine la cui forma ordinaria è

$$y''=f(y;y') \qquad (1)$$

La denominazione "autonoma" deriva dal fatto che nell'espressione dell'equazione non figura esplicitamente la variabile indipendente x.

Se la funzione $f(y;y')$ in un aperto A di R^2 è di classe C^1 si determina il suo integrale generale risolvendo due successive equazioni differenziali del primo ordine introducendo una funzione ausiliaria.

Precisamente, si pone

$$z(y)=y'(x) \qquad (2)$$

Nella funzione z la variabile indipendente è y. Dalla (2) si deduce l'espressione di y'' applicando il teorema della derivata di una funzione composta:

$$y''=\frac{d}{dx}y'(x)=\frac{d}{dx}z(y(x))=\frac{dz(y)}{dy}\cdot\frac{dy(x)}{dx}=z'\cdot y'(x)=z'\cdot z \qquad (3)$$

Si osservi che nella (3) risulta

$$z'=\frac{dz(y)}{dy} \qquad (4)$$

L'equazione di partenza assume la seguente forma

$z'\cdot z=f(y;z)$, da cui l'equazione del primo ordine

$$z'=\frac{1}{z}\cdot f(y;z) \qquad (1.1)$$

Una volta determinato l'integrale generale $z=g(y;C_1)$ della (1.1), con C_1 costante arbitraria, si ritorna alla variabile x riutilizzando la (2) ottenendo la **seconda equazione** differenziale del primo ordine

$$y'(x)=g(y;C_1)\rightarrow\frac{dy}{dx}=g(y;C_1); \qquad (5)$$

Quest'equazione è a **variabili separabili** e risolta fornirà l'integrale generale dell'equazione autonoma di partenza.

Osservazioni

1) Il metodo descritto, apparentemente semplice, nel corso della risoluzione di una specifica equazione differenziale del tipo indicato può risultare lungo e laborioso e ciò in base alle specifiche forme analitiche nelle quali si presentano le equazioni differenziali di transito (1.1) e (5).
2) Nel caso in cui si debba risolvere un problema di Cauchy originato da un'equazione differenziale autonoma, sfruttando le condizioni al contorno, una volta determinato l'integrale generale $z=g(y;C_1)$ della (1.1) è consigliabile trovare il corrispondente valore della costante C_1 prima di procedere con la risoluzione della successiva equazione differenziale (5) del primo ordine.

Nota teorica

Esercizi proposti

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

(1) $\begin{cases} y''\cdot y^2 + y' = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$

Risposta: $y = \sqrt{2x+1}$,valida per $x > -\frac{1}{2}$

(2) $\begin{cases} y'' + y = (y')^2 \\ y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 1 \end{cases}$

Risposta: $y = \frac{x^2}{4} + x + \frac{1}{2}$, per $(x \geq -2) \wedge \left(y \geq -\frac{1}{2}\right)$

---

(1) Esercizio assegnato nella prova d'esame di Analisi Matematica II, CdL in Ingegneria dell'Informazione, Lecce, 13-02-2013

(2) Esercizio assegnato nella prova d'esame di Analisi Matematica II, CdL in Ingegneria dell'Informazione, Lecce, 15-01-2015