Esercitazione per l'esame di Matematica Generale

Studio di una serie numerica, utilizzo dei simboli di Landau, studio di una funzione irrazionale

Es1) Determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}+1}$

Questa serie ha i termini con segno alterno e si studia velocemente richiamando il Criterio di Leibniz.

Criterio di Leibniz

1) I termini della serie sono a segno alterno.
2) Il limite del termine generale della serie è infinitesimo, cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
3) La successione dei valori assoluti dei termini della serie è decrescente, cioè per ogni n si verifica che $|a_n| \geq |a_{n+1}|$.

La serie in oggetto verifica le tre proprietà indicate. Dimostriamolo.

1) Considerato che il denominatore della frazione con n naturale è positivo, il segno dei termini è determinato dalla potenza $(-1)^n$ che assume valore positivo con n pari e negativo con n dispari.
2) Il limite del termine generale per n→+ esiste e vale zero. Per la giustificazione basta osservare che

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}+1} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$, quindi anche $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

3) Con n∈N risulta n<n+1, quindi sussiste anche $|a_n| = \frac{1}{n+\sqrt{n}+1} > \frac{1}{(n+1)+\sqrt{n+1}+1} = |a_{n+1}|$

Conclusione - La serie in oggetto è convergente.

*** ***

Es2) Stabilire quali polinomi di grado minore o uguale a tre soddisfano contemporaneamente le due seguenti condizioni:

$P(x)=o(x)$ per $x\to 0$ e $P(x) = O(x^2)$ per $x\to+\infty$

Ricordiamo che:

1) il simbolo $P(x) = o(x^\alpha)$ per $x\to 0$, con $\alpha>0$, indica che il polinomio per $x\to 0$ è un infinitesimo di ordine maggiore o uguale all'infinitesimo x^α, che ha ordine α, dunque che sussiste il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{x^\alpha} = 0$$

2) il simbolo $P(x) = O(x^2)$ per $x\to+\infty$ indica che il polinomio per $x\to+\infty$ è un infinito di ordine 2, quindi che il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{x^2}$$

esiste ed è un numero finito diverso da zero.

Ciò premesso, i polinomi che hanno queste caratteristiche devono essere di secondo grado ma con il termine di grado minore che abbia grado α>1. La forma algebrica di tali polinomi è la seguente

$P(x)=ax^2+bx^\alpha$, con i parametri che soddisfano le condizioni $a\neq 0$, $b\neq 0$, $1<\alpha\leq 2$.

Osservazione

Anche i polinomi della forma $P(x)=ax^2$, con $a\neq 0$, verificano le condizioni richieste.

*** ***

Es3) Studio di funzione

Della seguente funzione $f(x)=x+\sqrt{x^2+2x+2}$ tracciare il grafico e determinare gli estremi e gli eventuali asintoti.

Elaborazioni

1) La funzione è irrazionale intera. Osservato che il radicando presenta il discriminante negativo $\frac{\Delta}{4}=1-2=-1$ si deduce che l'argomento della radice assume valori positivi per ogni x reale e quindi la funzione ha come dominio R.

2) Estremi della funzione

Studio dei limiti a +∞,-∞

$\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+2x+2}=+\infty$, dunque **l'estremo superiore** è **Sup(*f*)=+∞**

Questo risultato indica che il grafico della funzione potrebbe avere un asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

Controlliamo con lo studio dei limiti ulteriori:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+2x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\sqrt{1+2x^{-1}+2x^{-2}}\right)}{x}=2=m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+2x^{-1}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+2x^{-1}+2x^{-2}}+1\right)}=1$$

Conclusione - Effettivamente il diagramma della funzione ammette la retta s_1:y=2 x +1 come asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+2x+2}=-\infty+\infty$, forma indeterminata. Si studia il limite procedendo con la razionalizzazione.

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+2x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+2x+2}\right)\left(x-\sqrt{x^2+2x+2}\right)}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(x^2+2x+2\right)}{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-2}{x-|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-2}{x-(-x)\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(-2-2/x\right)}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-2-2/x\right)}{\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=\frac{-2}{2}=-1$$ Questo valore indica che il grafico della funzione ammette la retta s_2:y=-1 come asintoto orizzontale per $x\to-\infty$

3) Monotonia, massimi e minimi relativi o assoluti.

La funzione derivata prima è

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

definita per ogni x reale.

Studiamo il segno del numeratore.

$$\sqrt{x^2+2x+2}+x+1>0$$
$$\to\sqrt{x^2+2x+2}>-x-1$$

La disuguaglianza è senz'altro verificata se $-x-1<0$, cioè per $x>-1$, perché il primo membro è positivo e il secondo è negativo.

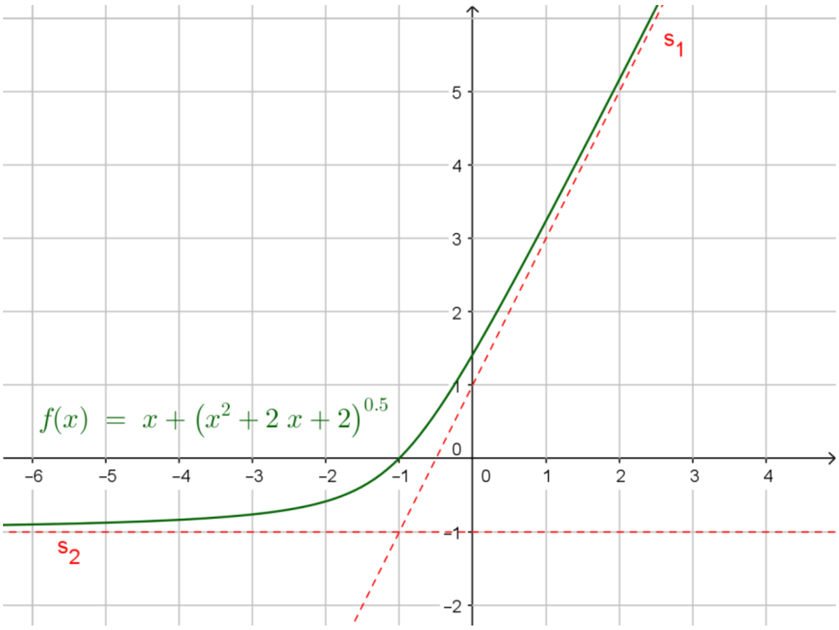

Figura 1- Rappresentazione del diagramma della funzione e degli asintoti.

Inoltre, per i valori $x\le-1$ si possono elevare i due membri al quadrato e semplificare i termini simili. Si ottiene:

$x^2+2x+2>x^2+2x+1$, da cui, 1>0 che è vera. Si conclude che per ogni x reale il numeratore della frazione che rappresenta la funzione derivata prima è positivo e poiché lo è anche il denominatore, la derivata prima è positiva per ogni x, quindi al funzione è strettamente crescente e non ha né minimi, né massimi relativi.

A questo punto si può anche affermare che **l'estremo inferiore** della funzione è **Inf(*f*)=-1**.

Da ultimo, osserviamo che la funzione ammette come zero x=-1.