Sviluppo di Fourier

[(1)]Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni la funzione 2-periodica definita da $f(x)=e^x-1$, con $x\in[0;1]$. Studiare quindi la convergenza puntuale e uniforme della serie ottenuta.

Elaborazioni

Ricordiamo che la funzione cos*x* è pari ed essendoci precisato nel testo che la funzione *f*(*x*) deve essere sviluppata in serie di Fourier di soli coseni vuol dire che anche la funzione *f*(*x*) è pari, dunque per ogni $x\in[-1;0[$ risulta $f(x)=f(-x)$. La funzione in oggetto nell'intervallo [-1;1] si esplicita come segue

$$f(x)=\begin{cases} e^x-1 & per \quad x\in[0;1] \\ e^{-x}-1 & per \quad x\in[-1;0[\end{cases}.$$

Il diagramma della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. In Figura 1 è rappresentato il diagramma relativo all'intervallo [-1;1].

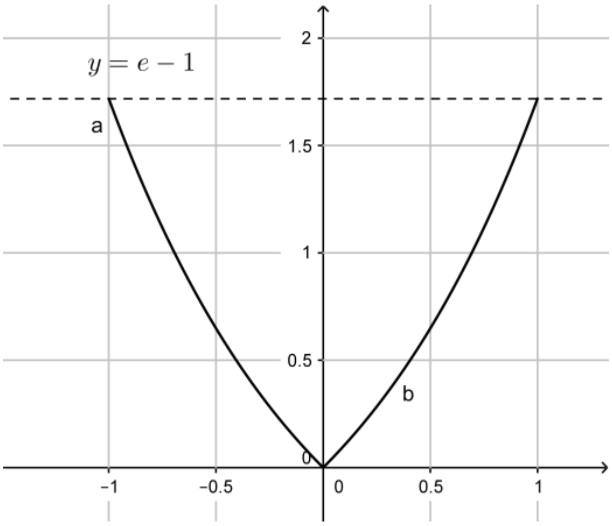


Figura 1

Comandi in Geogebra

Curva[t, *e* ^(-t)-1, t, -1, 0], per ottenere il diagramma per $x\in[-1;0[$;

Curva[t, *e* ^t-1, t, 0, 1] , per ottenere il diagramma per $x\in[0;1]$.

Nella serie di Fourier associata alla funzione figurano solo i termini in coseno, oltre al primo termine, dunque la sua forma è

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos(k\omega x)$$

Calcolo dei coefficienti a_k

Con $T=2$ si ha

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(e^x-1\right)dx=\left[e^x-x\right]_0^1=e-2$$

Calcolo di a_k.

Con $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$, si ha

[(1)] Esercizio assegnato nella prova d'esame di Analisi Matematica 1 del 23-06-2014, Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione, Lecce

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{2}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{2}{2}} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = 2\int_0^1 \left(e^x - 1\right)\cos(k\pi x)\,dx = 2\int_0^1 e^x\cos(k\pi x)\,dx +$$
$$-2\int_0^1 \cos(k\pi x)\,dx\,.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali: il primo si calcola per parti, il secondo è immediato.

Occupiamoci dell'integrale indefinito del primo.

$$\int e^x\cos(k\pi x)\,dx = e^x\cos(k\pi x) - \int e^x\left(-sen(k\pi x)\right)\cdot k\pi dx = e^x\cos(k\pi x) + k\pi\int e^x sen(k\pi x)\,dx = e^x\cos(k\pi x) +$$
$$k\pi\left[e^x sen(k\pi x) - \int e^x\cos(k\pi x)\cdot k\pi dx\right] = e^x\cos(k\pi x) + k\pi e^x sen(k\pi x) - (k\pi)^2\int e^x\cos(k\pi x)\,dx$$

Trasportando al primo membro l'integrale residuo otteniamo

$\left(1+k^2\pi^2\right)\int e^x\cos(k\pi x)\,dx = e^x\cos(k\pi x) + k\pi e^x sen(k\pi x)$, da cui

$\int e^x\cos(k\pi x)\,dx = \frac{e^x}{1+k^2\pi^2}\left(\cos(k\pi x) + k\pi\cdot sen(k\pi x)\right) + c$, con c costante reale arbitraria.

Primo integrale definito

$$2\int_0^1 e^x\cos(k\pi x)\,dx = 2\left[\frac{e^x}{1+k^2\pi^2}\left(\cos(k\pi x) + k\pi sen(k\pi x)\right)\right]_0^1 =$$
$$2\left(\frac{e}{1+k^2\pi^2}\left(\cos(k\pi) + k\pi\cdot sen(k\pi)\right) - \frac{1}{1+k^2\pi^2}(1+k\pi\cdot 0)\right) = 2\left(\frac{e\cdot\cos(k\pi)}{1+k^2\pi^2} - \frac{1}{1+k^2\pi^2}\right) = \frac{2}{1+k^2\pi^2}\left(e\cdot(-1)^k - 1\right)$$

Secondo integrale definito

$$-2\int_0^1 \cos(k\pi x)\,dx = \frac{-2}{k\pi}\left[sen(k\pi x)\right]_0^1 = \frac{-2}{k\pi}\left[sen(k\pi) - 0\right] = 0$$

Concludiamo che

$$a_k = \frac{2}{1+k^2\pi^2}\left(e\cdot(-1)^k - 1\right)$$

Scriviamo ora la serie di Fourier per la funzione in esame

$$e - 2 + 2\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e\cdot(-1)^k - 1}{1+k^2\pi^2}\cdot\cos(k\pi x)$$

Convergenza della serie di funzioni

Osserviamo che la funzione in esame nell'intervallo [-1;1] è continua e, ovviamente limitata, quindi per il teorema di Dirichlet la serie non solo converge puntualmente per ogni *x* dell'intervallo alla funzione *f*(*x*), ma addirittura converge uniformemente alla stessa funzione in ogni intervallo chiuso contenuto in [-1;1] , quindi anche in tutto l'intervallo [-1;1], nonché in ogni intervallo chiuso [a;b] di R.

Grafici

(somma dei primi due termini)

$p2(x)= e -2+2 ((-e-1)/(1+ \pi^2) \cos(\pi x)$

(somma dei primi tre termini)

$p3(x)= e -2+2 ((-e-1)/(1+ \pi^2) \cos(\pi x)+ (e - 1) / (1 + 4\pi^2) \cos(2\pi x)$

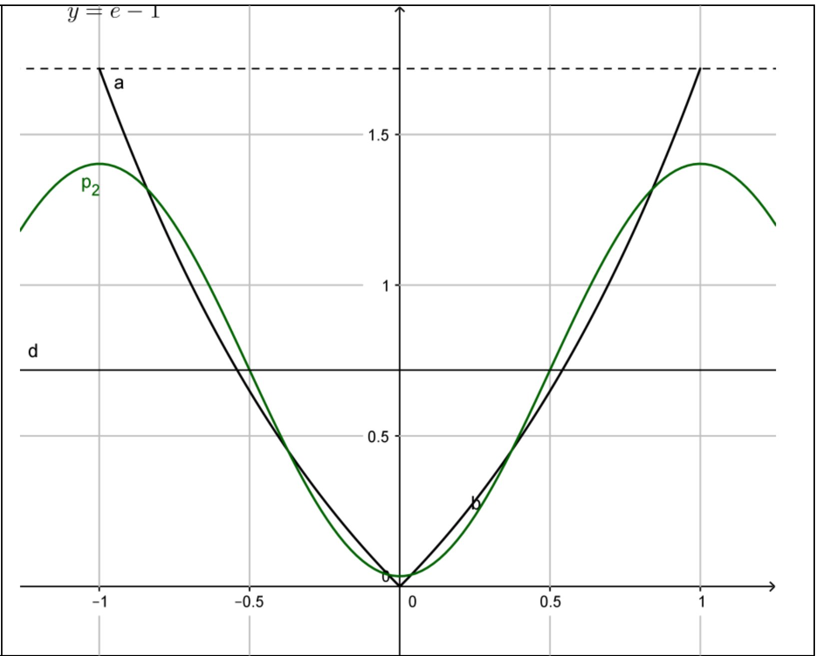
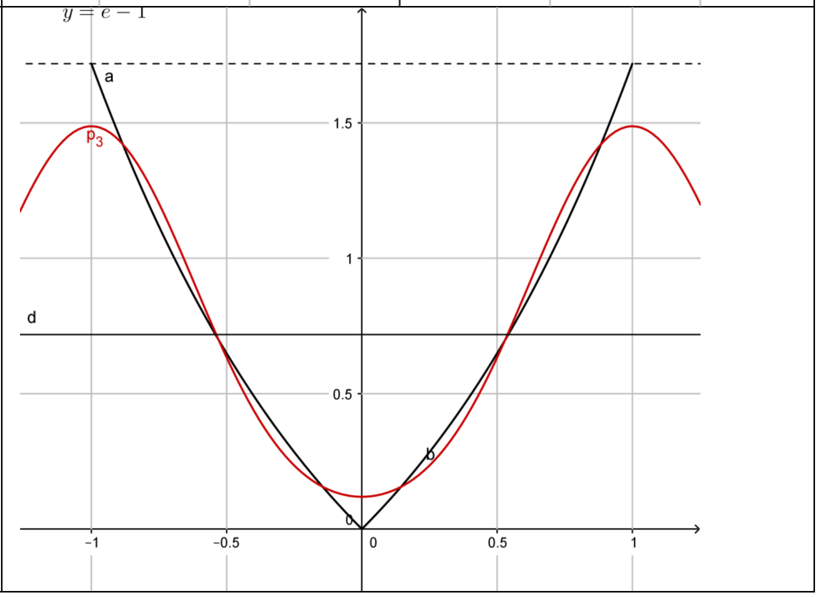
Somma dei primi quattro termini

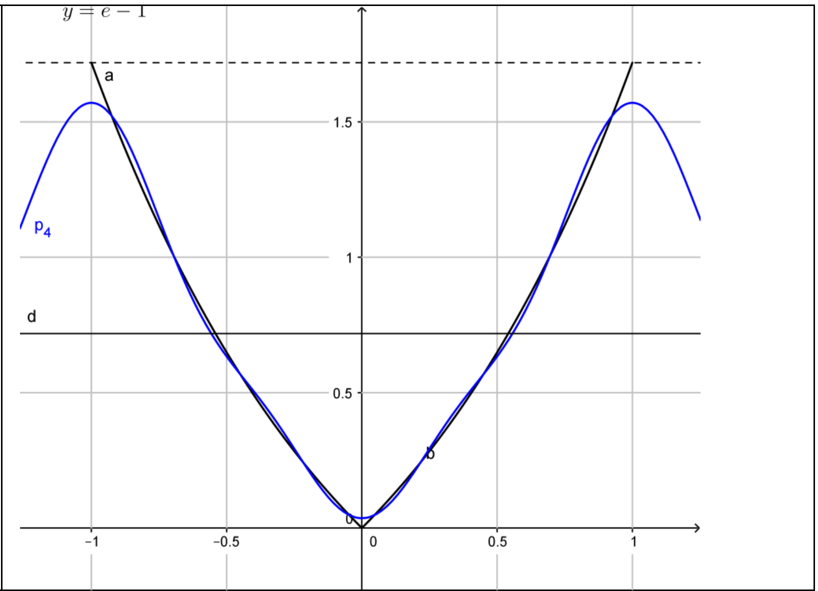
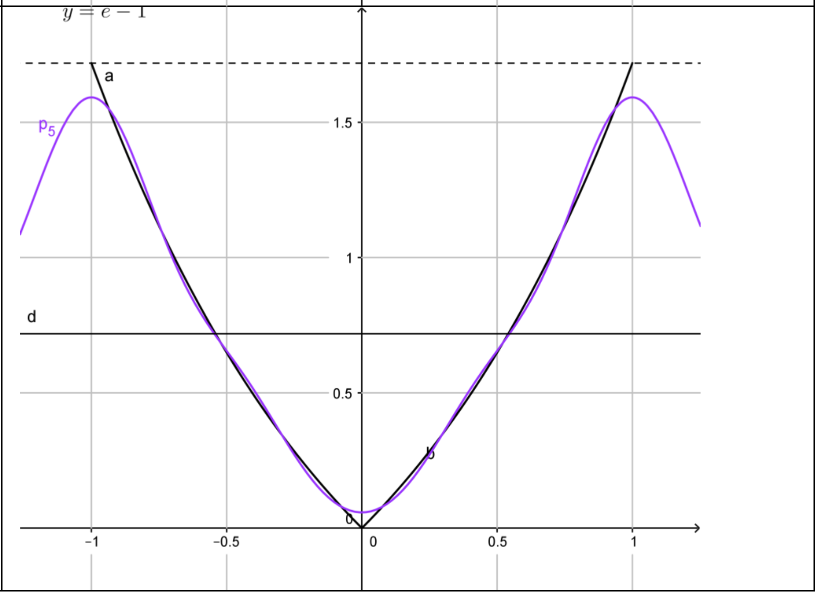
$p4(x)= e -2+2 ((-e-1)/(1+ \pi^2) \cos(\pi x)+ (e - 1) / (1 + 4\pi^2) \cos(2\pi x) + (-e - 1) / (1 + 9\pi^2) \cos(3\pi x)$

Somma dei primi cinque termini

$p5(x)=e - 2 + 2 ((-e - 1) / (1 + \pi^2) \cos(\pi x) + (e - 1) / (1 + 4\pi^2) \cos(2\pi x) + (-e - 1) / (1 + 9\pi^2) \cos(3\pi x)+(e - 1) / (1 + 16\pi^2) \cos(4\pi x))$

Riportiamo nella tabella che segue le approssimazioni della funzione ottenute sommando i primi due termini, i primi tre termini, i primi quattro termini, i primi cinque termini della serie di Fourier.

y= p2(x)	
y= p3(x)	

y= p4(x)	 $y = e - 1$ a p_4 d b 1.5 1 0.5 0 −1 −0.5 0 0.5 1
y= p5(x)	 $y = e - 1$ a p_5 d b 1.5 1 0.5 0 −1 −0.5 0 0.5 1

*** ***