Problema di Cauchy del secondo ordine

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-5y'-6y=6x^2+10x-8+14e^{-x} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=7 \end{cases}$$

Elaborazioni

Equazione caratteristica dell'equazione omogenea:

$\lambda^2-5\lambda-6=0$, le cui radici sono $\lambda=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{5\pm7}{2}\to\lambda_1=-1;\lambda_2=6$.

L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$, con C_1, C_2 costanti arbitrarie.

Ricerca di un integrale particolare dell'equazione completa

L'integrale particolare da cercare sarà della forma $\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$, con $\varphi_1(x)=ax^2+bx+c$ e $\varphi_2(x)=k\cdot xe^{-x}$, ciò perché il coefficiente dell'esponente dell'esponenziale è (–1).

Deve dunque risultare

$\varphi(x)=ax^2+bx+c+k\cdot xe^{-x}$, da cui

$\varphi'(x)=2ax+b+k(1-x)e^{-x}$,

$\varphi''(x)=2a+k(-2+x)e^{-x}$

Imponiamo che l'integrale particolare e le sue derivate prima e seconda verifichino l'equazione completa per ricavare i coefficienti a, b, c, k.

$$2a+k(-2+x)e^{-x}-5\left[2ax+b+k(1-x)e^{-x}\right]-6\left(ax^2+bx+c+k\cdot xe^{-x}\right)=6x^2+10x-8+14e^{-x}\to$$

$$-6ax^2+(-10a-6b)x+(2a-5b-6c)+(-7k)e^{-x}=6x^2+10x-8+14e^{-x}\to$$

$$\begin{cases} -6a=6 \\ -10a-6b=10 \\ 2a-5b-6c=-8 \\ -7k=14 \end{cases}\to\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=1 \\ k=-2 \end{cases}$$

L'integrale particolare cercato è $\varphi(x)=-x^2+1-2xe^{-x}$ e l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x} + \left(-x^2 + 1 - 2xe^{-x}\right)$$

Ricerca della soluzione del problema di Cauchy

Devono essere soddisfatte le seguenti condizioni al contorno:

1) $y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 1$

2) $y' = -C_1 e^{-x} + 6C_2 e^{6x} - 2x - 2\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) \rightarrow y'(0) = -C_1 + 6C_2 - 2 = 7$

Si risolve il sistema $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + 6C_2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{9}{7} \\ C_2 = \dfrac{9}{7} \end{cases}$

La soluzione del problema di Cauchy in esame è

$$y = \frac{9}{7}\left(-e^{-x} + e^{6x}\right) + \left(-x^2 + 1 - 2xe^{-x}\right)$$

Segue la rappresentazione del diagramma dell'integrale soluzione.