# Problema di Cauchy

## Equazione differenziale del primo ordine[1]

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + x + 1 + 3x sen(2x) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

e indicare esplicitamente l'intervallo più grande contenente x=1 in cui tale soluzione è definita.

**Soluzione**

1) L'equazione differenziale in oggetto è del primo ordine, lineare e a coefficienti variabili.
2) Per quanto concerne il dominio di definizione della variabile x osserviamo che deve risultare x≠0. Ciò premesso, considerato che la soluzione particolare del problema di Cauchy che si deve cercare deve avere il diagramma che passa per il punto P(1;1) possiamo affermare che il dominio più ampio in cui potrà variare x per detta soluzione sarà l'intervallo ]0;+∞[.
3) Strategia risolutiva
   a. Per risolvere il problema in esame scriveremo innanzitutto l'equazione differenziale nella seguente forma classica

   $$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

   b. Costruiremo la funzione integrale $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$
   c. Applicheremo la formula che permette di determinare direttamente l'espressione analitica della soluzione del problema di Cauchy che è

   $$y(x) = e^{-A(x)} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s) \cdot e^{A(s)} ds \right\}$$

4) Elaborazioni
   a. $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x + 1 + 3x sen(2x)$ Equazione nella forma (1).
   b. $a(x) = -\dfrac{1}{x} \rightarrow A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt = \int_{1}^{x} -\dfrac{1}{t} dt = \left[ -\log|t| \right]_1^x = -\log|x|$. Poiché abbiamo precisato che x∈]0;+∞[ possiamo scrivere $A(x) = -\log x$.
   c. Applichiamo ora la formula indicata nel precedente punto 3-c) con $b(s) = s + 1 + 3s \cdot sen(2s)$ per trovare la soluzione del problema di Cauchy in esame. Si ha

[1] Testo presente nella prova d'Esame Scritto del Corso di Matematica 1 ed Esercitazioni, A.A. 2012-2013- Parma, 5 aprile 2013, Corso di Laurea in Chimica

$$y(x)=e^{\log x}\left\{1+\int_1^x (s+1+3s\cdot sen(2s))\cdot e^{-\log s}ds\right\}= x\left\{1+\int_1^x (s+1+3s\cdot sen(2s))\cdot\frac{1}{s}ds\right\}=$$

$$x\left\{1+\int_1^x\left(1+\frac{1}{s}+3\cdot sen(2s)\right)ds\right\}= x\left\{1+\left[s+\log s-\frac{3}{2}\cdot\cos(2s)\right]_1^x\right\}=$$

$$x\left\{1+\left(x+\log x-\frac{3}{2}\cdot\cos(2x)\right)-\left(1+\log 1-\frac{3}{2}\cdot\cos(2)\right)\right\}= x\left(x+\log x-\frac{3}{2}\cdot\cos(2x)+\frac{3}{2}\cdot\cos(2)\right)$$

Rappresentiamo ora il grafico della soluzione trovata.