Studio di una funzione e grafico probabile

Funzione razionale fratta con due moduli

Progetto

Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-|x-2|}{x|1-x|}$

determinando dominio, segno e zeri, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti, precisando altresì l'eventuale esistenza di punti di discontinuità, con la relativa classificazione.

Elaborazioni

1. **Classificazione e dominio di definizione**
   La funzione è razionale fratta ed è definita per ogni x reale che non annulla il denominatore. Poiché il denominatore si annulla per $x=0$ ed $x=1$ si conclude che il dominio di definizione è A=R-{0;1}.
2. **Segno e zeri**- Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore nel dominio di definizione.
   2.1 N(x)≥0→ $x^2-|x-2|\ge 0$.
   Per $x<2$ la disequazione è equivalente alla seguente
   $x^2-(-x+2)\ge 0 \to x^2+x-2\ge 0$, che è soddisfatta per $(x\le -2)\vee(x\ge 1)$; dunque la disequazione è soddisfatta per ($x\le$-2)∨(1< x <2).
   Per $x\ge$2 la disequazione è equivalente alla seguente $x^2-(x-2)\ge 0\to x^2-x+2\ge 0$ e poiché il discriminante del trinomio al primo è Δ=1-8 = -7<0 la disequazione è soddisfatta per ogni $x\ge$2.
   Si conclude che nel dominio di definizione della funzione risulta:
   N(x)>0 per (x <-2)∨(x >1) e N(x)=0 per x =-2. Negli altri punti del dominio della funzione il numeratore è negativo.
   2.2 D(x)>0 → $x|1-x|>0$
   Osserviamo che nel dominio di definizione della funzione il denominatore è positivo per x >0 e negativo per x <0.
   2.3 Confronto dei segni del numeratore e del denominatore.
   Dal confronto dei segni del numeratore e del denominatore si conclude che:
   $f(x)>0$ per (-2< x <0)∨(x >1); $f(x)<0$ per (x <-2) ∨ (0< x <1); $f(x)=0$ solo per x =-2.
3. **Limiti, eventuali asintoti e punti di discontinuità**
   In virtù dello studio eseguito fin qui possiamo esplicitare la funzione come segue:

$$f(x)=\frac{x^2-|x-2|}{x|1-x|}=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x(1-x)} & per \quad (x<1)\wedge(x\ne 0)\\[2ex] \dfrac{x^2+x-2}{x(x-1)} & per \quad 1<x<2\\[2ex] \dfrac{x^2-x+2}{x(x-1)} & per \quad x\ge 2\end{cases}$$

   Osserviamo che si devono studiare i limiti nei punti della frontiera del dominio di definizione. La frontiera è $Fr(A)=\{-\infty;0;1;+\infty\}$.

3.1 $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-2}{x(1-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\frac{1+0-0}{0-1}=-1$; la retta y=-1 è asintoto orizzontale per x→-∞.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{x(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1-0+0}{1-0}=1$;la retta y=1 è asintoto orizzontale per x →+∞.

3.2 $\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x-2}{x(1-x)}=\frac{0+0-2}{0^-(1-0)}=\frac{-2}{0^-}=-2\cdot(-\infty)=+\infty$;

$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x-2}{x(1-x)}=\frac{0+0-2}{0^+(1-0)}=\frac{-2}{0^+}=-2\cdot(+\infty)=-\infty$; L'asse delle ordinate è asintoto verticale da destra e da sinistra e dunque il punto ***x*** **=0 è di discontinuità di seconda specie**. Precisiamo anche che non esiste il linite per $x\to0$ perché i due limiti laterali per $x\to0^-$ e $x\to0^+$ esistono ma hanno valori diversi.

3.3 $\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+x-2}{x(1-x)}=\frac{0}{0}$, **forma indeterminata**. Procediamo scomponendo in fattori il numeratore.

$\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+2)}{x(1-x)}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{-x\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+2}{-x}=-3$. Poniamo $f(1^-)=-3$.

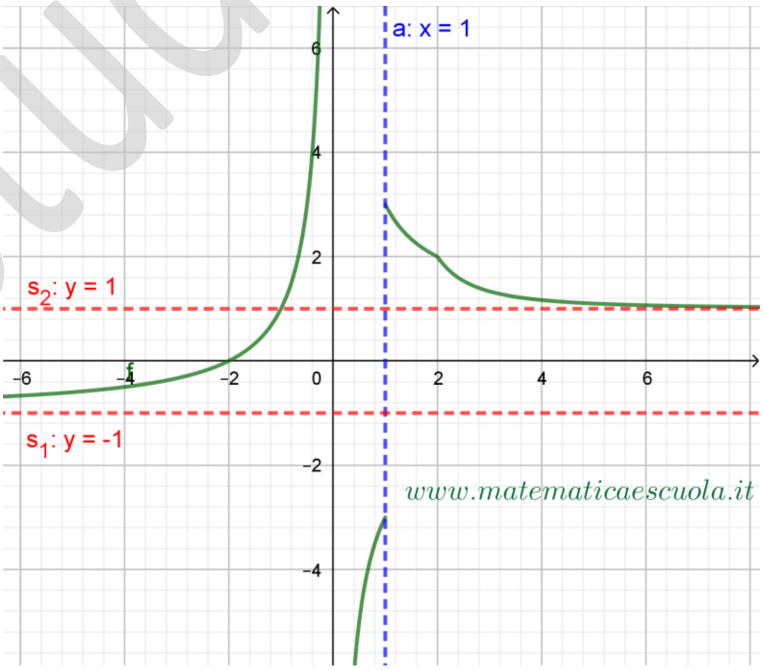
$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x-2}{x(x-1)}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+2}{x}=3$. Poniamo $f(1^+)=3$.

Il punto ***x*****=1 è discontinuità di prima specie** ed ivi la funzione presenta il salto

$\sigma= f(1^+)- f(1^-)=6$.

Lo studio dei limiti eseguito permette di affermare che la funzione in oggetto non è limitata superiormente, né inferiormente:**Sup(f)=+∞**; **Inf(f)=-∞**.

Riportiamo di seguito la rappresentazione del grafico della funzione tenendo conto delle sue caratteristiche dedotte dagli studi eseguiti.



Nota di approfondimento per il punto *x*=2

Per quanto concerne la derivabilità, determinando l'espressione della funzione derivata prima, si riconosce che la funzione esaminata è derivabile in ogni punto del suo dominio di definizione diverso dal punto x=2; infatti in quest'ultimo punto non è derivabile perché le derivate laterali sinistra e destra esistono, sono finite, ma diverse tra loro. Risulta: $f'_{-}(2)=-\frac{1}{2}$, $f'_{+}(2)=-\frac{3}{2}$, che sono diverse, dunque il punto (2;f(2))=(2;2) è angoloso.