Studio di una funzione logaritmica con modulo[(1)]

Un aiuto dal foglio elettronico per la ricerca dell'ascissa

di un punto di minimo relativo con il metodo degli incrementi finiti

Della funzione

$$f(x)=\log_x\left(x^2-|x-2|\right)$$

determinare il dominio di definizione, studiare il segno e determinare gli eventuali zeri, studiare i limiti agli estremi del dominio precisando l'esistenza di eventuali asintoti, fornire una rappresentazione qualitativa del grafico.

Studiare la derivabilità e precisare in particolare il comportamento del diagramma della funzione in un intorno del punto x=2.

Elaborazioni

1. La funzione è definita per i valori della variabile che rendono positivi l'argomento della funzione logaritmica e la base, con quest'ultima diversa da 1; dunque sono i valori reali x che soddisfano il seguente sistema

$$\begin{cases}(x>0)\wedge(x\neq 1)\\ x^2-|x-2|>0\end{cases}$$

2. Risolviamo la disequazione $x^2-|x-2|>0$ limitatamente ai valori x>0.
   a. Per $0<x<2$ la disequazione diventa $x^2+x-2>0$. Le radici dell'equazione associata sono x_1=-2, x_2=1, quindi la disequazione è soddisfatta per (x<-2)$\vee$ (x>1) e limitatamente al vincolo $0<x<2$ le soluzioni accettabili sono 1<x<2.
   b. Per $x\geq 2$ la disequazione diventa $x^2-x+2>0$ e poiché il discriminate del trinomio al primo membro $\Delta=1-8=-7$ è negativo la disequazione è soddisfatta da ogni valore reale e nel caso specifico per ogni $x\geq 2$.
   c. Concludiamo che la disequazione in esame è soddisfatta per ogni x>1 ed anche il dominio di definizione della funzione è l'intervallo]1;+∞[.
3. **Studio del segno e ricerca degli eventuali zeri**. Studiamo la disequazione $\log_x\left(x^2-|x-2|\right)\geq 0$ nel dominio di definizione trovato. Possiamo esplicitare la funzione come segue:

$$f(x)=\begin{cases}\log_x\left(x^2+x-2\right) & per \quad 1<x<2\\ \log_x\left(x^2-x+2\right) & per \quad x\geq 2\end{cases}$$

[(1)] **Domani 15-nov-2018 si apre a Milano il Congresso annuale della Mathesis** , Società italiana di scienze matematiche e fisiche fondata nel 1895. Al Presidente e a tutti i Convegnisti auguro buon lavoro e dedico a tutti loro questo mio lavoro perché ritengo che sarà vicino alle riflessioni che i colleghi svilupperanno in particolare durante il previsto **Laboratorio sull'utilizzo delle calcolatrici grafiche,** strumento tecnologico ormai a disposizione degli studenti liceali nel corso l'Esame di Stato del Liceo Scientifico.

Osserviamo che la base della funzione logaritmica nel dominio di definizione è maggiore di 1.

a. Studio nell'intervallo]1;2[. Risulta $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow x^2+x-2\ge 1$; questa disequazione diventa $x^2+x-3\ge 0$. Le radici dell'equazione associata sono $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, cioè $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}<0$ e $x_2=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\approx 1{,}302$; quindi, limitatamente all'intervallo considerato la funzione è negativa per $1<x<\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$, positiva per $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}<x<2$, si annulla nel punto $x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$.

b. Studio nell'intervallo [2;+∞[. Risulta $f(x)>0 \Leftrightarrow x^2-x+2>1$, che diventa $x^2-x+1>0$. Questa disequazione è soddisfatta per ogni *x* reale, quindi per ogni *x* dell'intervallo in esame la funzione è strettamente positiva.

4. Limiti agli estremi del dominio

a. $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\log_x\left(x^2+x-2\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{ln\left(x^2+x-2\right)}{ln(x)}=\frac{ln\left(0^+\right)}{ln\left(1^+\right)}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$$

quindi la retta di equazione ***x*=1 è asintoto verticale da destra** per il diagramma della funzione.

b. $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\log_x\left(x^2-x+2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(x^2-x+2\right)}{ln(x)}=\frac{+\infty}{+\infty}$$, si tratta di una forma indeterminata. Si può applicare la regola di de l'Hôpital. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(x^2-x+2\right)}{ln(x)}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x-1}{x^2-x+2}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2x-1)}{x^2-x+2}=2$$

La retta di equazione **y=2 è asintoto orizzontale** per $x\to+\infty$.

5. Per maggiori informazioni sull'andamento del diagramma della funzione si può studiare la disuguaglianza $f(x)<2$.

   a. Per $1<x<2$ si ha:

   $\log_x\left(x^2+x-2\right)<2 \Leftrightarrow$

   $0<x^2+x-2<x^2$, da cui

   $\begin{cases} x^2+x-2>0 \\ x-2<0 \end{cases}$. Il sistema è soddisfatto da ogni punto dell'intervallo]1;2[.

   b. Per $x>2$ si ha:

   $\log_x\left(x^2-x+2\right)<2 \Leftrightarrow$

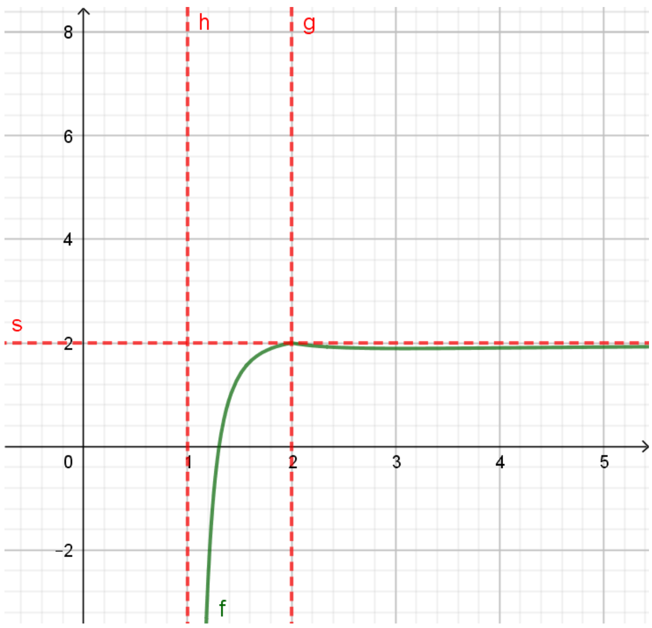

Figura 1

$0 < x^2 - x + 2 < x^2$, da cui $\begin{cases} x^2 - x + 2 > 0 \\ x > 2 \end{cases}$. Il sistema è soddisfatto per ogni x>2.

c. Dai risultati ottenuti emerge che il diagramma della funzione per ogni $x \neq 2$ giace al di sotto della retta y=2, inoltre, osservato che $f(2)=2$, si conclude che il punto **x=2 è di massimo assoluto**.

6. Il diagramma della funzione è riportato in Figura 1.
7. **Derivabilità, massimi e minimi relativi o assoluti**

a. Facendo riferimento all'esplicitazione della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log_x\left(x^2 + x - 2\right) & per \quad 1 < x < 2 \\ \log_x\left(x^2 - x + 2\right) & per \quad x \geq 2 \end{cases}$$ determiniamo la funzione derivata prima.

Per 1<x<2 risulta $f(x) = \dfrac{ln\left(x^2 + x - 2\right)}{ln(x)}$, quindi la funzione derivata prima è

$$f'(x) = \frac{1}{ln^2(x)} \cdot \left[\frac{2x+1}{x^2 + x - 2} \cdot ln(x) - \frac{1}{x} \cdot ln\left(x^2 + x - 2\right)\right]$$; questa funzione esiste senz'altro in ogni punto interno dell'intervallo]1;2[.

Per $x \geq 2$ risulta $f(x) = f(x) = \dfrac{ln\left(x^2 - x + 2\right)}{ln(x)}$, quindi

$$f'(x) = \frac{1}{ln^2(x)} \cdot \left[\frac{2x-1}{x^2 - x + 2} \cdot ln(x) - \frac{1}{x} \cdot ln\left(x^2 - x + 2\right)\right]$$, questa funzione esiste senz'altro per ogni $x \geq 2$.

Per lo studio della derivabilità nel punto x=2 occupiamoci dei valori delle derivate laterali in detto punto.

$$f'_-(2) = \frac{1}{ln^2(2)} \cdot \left[\frac{5}{4} \cdot ln(2) - \frac{1}{2} \cdot ln(4)\right] = \frac{1}{ln^2(2)} \cdot \left[\frac{5}{4} \cdot ln(2) - ln(2)\right] = \frac{1}{4ln(2)} > 0;$$

$$f'_+(2) = \frac{1}{ln^2(2)} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot ln(2) - \frac{1}{2} \cdot ln(4)\right] = \frac{1}{ln^2(2)} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot ln(2) - ln(2)\right] = -\frac{1}{4ln(2)} < 0$$

Si conclude che nel punto x=2 la funzione non è derivabile; il punto è angoloso. In ogni altro punto del dominio la funzione è derivabile.

Nel precedente punto 5.c abbiamo precisato che il punto x=2 è di massimo assoluto per la funzione; questa proprietà unita alle due ulteriori proprietà che la retta y=2 è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e che la funzione è derivabile certamente per x>2 permette di prevedere non solo che il diagramma della funzione per $x \to +\infty$ si avvicina alla retta y=2 dal di sotto, ma anche che **nell'intervallo]2;+ ∞[la funzione deve ammettere almeno un punto di minimo relativo proprio**. L'individuazione dei punti estremi della funzione richiederebbe lo studio degli zeri della funzione derivata prima in ciascuno dei due intervalli]1;2[,]2;+ ∞[. Il lavoro rigoroso necessario alla risoluzione dell'equazione $f'(x)=0$, come quello necessario per la disequazione $f'(x)\geq 0$, richiede che si richiami il teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua definita in un intervallo e l'**applicazione di uno dei metodi numerici di ricerca approssimata della radice di un'equazione**. Uno strumento utile è senza dubbio il confronto grafico di due particolari funzioni che emergono dal contesto di ricerca. **Qui, per evitare lunghi percorsi di ricerca, sfruttiamo invece l'utilizzo del foglio elettronico Excel** con cui si prepara una tabella di dati per la ricerca del previsto punto di minimo di ascissa $X_O>2$.

In cosa consiste il lavoro di ricerca?

Si imposta una tabella con tre colonne, nella prima si inseriscono i valori della variabile, nella seconda si calcolano i valori f(x) della funzione $\log_x\left(x^2-|x-2|\right)$, per la quale si utilizza il formato equivalente $\dfrac{ln\left(x^2-|x-2|\right)}{ln(x)}$, nella terza si confrontano le variazioni $\Delta f=f(x_2)-f(x_1)$ che la funzione subisce quando la variabile indipendente passa dal valore x_1 al valore $x_2=x_1+\Delta x$, dove **Δx è un incremento finito** scelto opportunamente per osservare la variabilità della funzione. Ebbene, se $f(x_2)-f(x_1)>0$ allora abbiamo l'**informazione di massima** che la funzione nell'intervallo $]x_1;x_2[$ potrebbe crescere, analogamente se $f(x_2)-f(x_1)<0$ allora si potrebbe ritenere che la funzione nell'intervallo $]x_1;x_2[$ potrebbe decrescere. Poiché siamo interessati ad individuare un intervallo in cui la funzione assume il suo minimo relativo ci si fa guidare dal segno della variazione di Δf. Via via si definiranno intervalli di dimensione sempre minore che ci guideranno ad accostarci al punto X_0 cercato.

Questa procedura di ricerca è conosciuta come "**metodo degli incrementi finiti del punto**" ed il foglio elettronico è uno strumento molto flessibile per eseguire ottime ricerche.

Di seguito sono riportate tre tabelle di dati Tab.1, Tab.2, Tab.3 ottenuti con Excel.

- Dalla prima tabella emerge che il punto di minimo relativo della funzione dovrebbe essere vicino all'intervallo [3,1;3,2]. Per ottenere i dati è stato scelto come punto iniziale x=2 (punto di massimo assoluto) e fissato per la variabile x l'incremento Δx=0,1.
- Affinando la ricerca è stata costruita la tabella Tab.2 per la quale è stato scelto l'incremento Δx=0,01 e punto iniziale x=3,05. Prudentemente è stato scelto come punto iniziale per la seconda ricerca il valore 3,05<3,1 primo estremo dell'intervallo individuato prima. La variazione del segno di Δf suggerisce che il punto cercato è prossimo all'intervallo [3,09;3,10].
- Affinando ulteriormente la ricerca, nella Tab.3 è stato scelto come punto iniziale x=3,08 (anche in questa terza ricerca è stato scelto come punto iniziale 3,08<3,09) e incremento Δx=0,001. Analizzando il segno di Δf si deduce che il punto cercato è prossimo all'intervallo [3,091;3,092].

Chiudiamo questa ricerca assumendo che il punto di minimo relativo abbia approssimativamente ascissa X_0 = 3,09.

8. Ulteriori dettagli sul grafico della funzione in un intorno del punto x=2 si possono ottenere dallo studio del segno della derivata seconda per x<2 e per x>2. L'espressione della funzione derivata seconda, che esiste in ogni punto x≠2 del dominio, è alquanto laboriosa e qui non si riporta[(2)]; tuttavia forniamo i due valori cui tende f''(x) per x→2 da sinistra e da destra. Risulta

$$f_-^{"}(2)=\lim_{x\to 2^-} f^{"}(x)=-\frac{4+ln(2)}{16ln^2(2)}\simeq -1,33\,;\;\; f_+^{"}(2)=\lim_{x\to 2^+} f^{"}(x)=\frac{4+7ln(2)}{16ln^2(2)}\simeq 1,15$$

I valori ottenuti indicano che la concavità del grafico della funzione volge verso il basso in un intorno sinistro de punto x=2 e verso l'alto in un intorno destro dello stesso punto e pertanto la curva è tangente dal di sotto alla semitangente sinistra e tangente dal di sopra alla semitangente destra nel punto x=2.

Tab.1	f(x)	Δf	Tab.2	f(x)	Δf	Tab.3	f(x)	Δf
x	ln(x^2-ass(x-2))/ln(x)	$f(x_2)-f(x_1)$	x	ln(x^2-ass(x-2))/ln(x)	$f(x_2)-f(x_1)$	x	ln(x^2-ass(x-2))/ln(x)	$f(x_2)-f(x_1)$
2	2		3,05	1,892599292		3,08	1,892556944	
2,1	1,96908528	-0,0309147	3,06	1,892579512	-1,978E-05	3,081	1,892556395	-5,4938E-07
2,2	1,946477316	-0,022608	3,07	1,892565445	-1,407E-05	3,082	1,8925559	-4,95279E-07
2,3	1,929905515	-0,0165718	3,08	1,892556944	-8,5E-06	3,083	1,892555458	-4,41318E-07
2,4	1,917788612	-0,0121169	3,09	1,892553868	-3,076E-06	3,084	1,892555071	-3,87497E-07
2,5	1,909000925	-0,0087877	3,1	1,892556078	2,21E-06	3,085	1,892554737	-3,33815E-07
2,6	1,902726322	-0,0062746	3,11	1,892563438	7,36E-06	3,086	1,892554457	-2,80272E-07
2,7	1,898363939	-0,0043624	3,12	1,892575816	1,238E-05	3,087	1,89255423	-2,26867E-07
2,8	1,895465584	-0,0028984	3,13	1,892593083	1,727E-05	3,088	1,892554056	-1,73601E-07
2,9	1,893693184	-0,0017724	3,14	1,892615114	2,203E-05	3,089	1,892553936	-1,20473E-07
3	1,892789261	-0,0009039	3,15	1,892641787	2,667E-05	3,09	1,892553868	-6,74825E-08
3,1	1,892556078	-0,0002332	3,16	1,892672981	3,119E-05	3,091	1,892553854	-1,46292E-08
3,2	1,892840684	0,0002846	3,17	1,89270858	3,56E-05	3,092	1,892553892	3,80872E-08
3,3	1,893524034	0,0006834	3,18	1,892748471	3,989E-05	3,093	1,892553982	9,0667E-08
3,4	1,894512982	0,0009889	3,19	1,892792541	4,407E-05	3,094	1,892554125	1,43111E-07
3,5	1,89573432	0,0012213	3,2	1,892840684	4,814E-05	3,095	1,892554321	1,95418E-07
3,6	1,897130302	0,001396	3,21	1,892892793	5,211E-05	3,096	1,892554568	2,47591E-07
Stima	$3,1<X_o<3,2$		Stima	$3,09<X_o<3,10$		Stima	$3,091<X_o<3,092$	

9. **Osservazione didattica**- Considerato che questo lavoro è indirizzato principalmente agli studenti della classe quinta del Liceo Scientifico e che nel corso dell'Esame di Stato che gli stessi affronteranno nel prossimo mese di giugno è consentito utilizzare una **calcolatrice grafica**, è bene far notare che se il software implementato nella calcolatrice non è abbastanza flessibile l'obiettivo della determinazione del valore approssimato dell'ascissa del punto di minimo relativo $X_0 \approx 3,09$ potrebbe essere difficilmente raggiungibile facendo semplicemente affidamento sulla

[(2)] Il lettore interessato potrebbe svolgere un utile esercizio determinando le due espressioni di f''(x), quella per 1<x<2 e quella per x>2.

rappresentazione grafica della funzione. Faccio notare, infatti, che nella Figura 1 in cui è riportato il diagramma della funzione nelle vicinanze del punto x=3 non si nota alcun "avvallamento" del grafico che lasci supporre l'esistenza del punto di minimo relativo in oggetto.

Del resto, **anche con il collaudato metodo delle tangenti e delle secanti di Newton-Fourier**, che sfrutta nell'algoritmo di ricerca l'espressione della funzione derivata prima, la complessità formale di quest'ultima funzione rende decisamente impegnativo il lavoro richiesto. Per questo motivo in questo lavoro è stato scelto di applicare il "**metodo degli incrementi finiti del punto**", che comunque va eseguito con molta attenzione.