Esercitazione su una funzione logaritmica con modulo

Della funzione

$$f(x)=\log_x\left(x^2-|x-2|\right)$$

determinare il dominio di definizione, studiare il segno e determinare gli eventuali zeri, studiare i limiti agli estremi del dominio precisando l'esistenza di eventuali asintoti, fornire una rappresentazione qualitativa del grafico.

Elaborazioni

1. La funzione è definita per i valori della variabile che rendono positivi l'argomento della funzione logaritmica e la base, con quest'ultima diversa da 1; dunque sono i valori reali x che soddisfano il seguente sistema

$$\begin{cases}(x>0)\wedge(x\neq 1)\\ x^2-|x-2|>0\end{cases}$$

2. Risolviamo la disequazione $x^2-|x-2|>0$ limitatamente ai valori x>0.
   a. Per $0<x<2$ la disequazione diventa $x^2+x-2>0$. Le radici dell'equazione associata sono x_1=-2, x_2=1, quindi la disequazione è soddisfatta per (x<-2)$\vee$ (x>1) e dunque limitatamente al vincolo $0<x<2$ le soluzioni accettabili sono 1<x<2.
   b. Per $x\geq 2$ la disequazione diventa $x^2-x+2>0$ e poiché il discriminate del trinomio al primo membro $\Delta=1-8=-7$ è negativo la disequazione è soddisfatta da ogni valore reale e nel caso specifico per ogni $x\geq 2$.
   c. Concludiamo che la disequazione in esame è soddisfatta per ogni x>1 ed anche il dominio di definizione della funzione è l'intervallo]1;+∞[.
3. **Studio del segno e ricerca degli eventuali zeri**. Studiamo la disequazione $\log_x\left(x^2-|x-2|\right)\geq 0$ nel dominio di definizione trovato. Possiamo esplicitare la funzione come segue:

$$f(x)=\begin{cases}\log_x\left(x^2+x-2\right) & per \quad 1<x<2\\ \log_x\left(x^2-x+2\right) & per \quad x\geq 2\end{cases}$$

   Osserviamo che la base della funzione logaritmica nel dominio di definizione è maggiore di 1.

   a. Studio nell'intervallo]1;2[. Risulta $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2+x-2\geq 1$, e questa disequazione diventa $x^2+x-3\geq 0$. Le radici dell'equazione associata sono $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, cioè $x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}<0$ e $x_2=\frac{\sqrt{13}-1}{2}\approx 1{,}302$. Quindi, limitatamente all'intervallo considerato la funzione è negativa per $1 < x < \frac{\sqrt{13}-1}{2}$, positiva per $\frac{\sqrt{13}-1}{2} < x < 2$ e si annulla nel punto $x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

b. Studio nell'intervallo [2;+∞[. Risulta $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 > 1$, che diventa $x^2 - x + 1 > 0$. Questa disequazione è soddisfatta per ogni *x* reale, quindi per ogni *x* dell'intervallo in esame la funzione è strettamente positiva.

4. Limiti agli estremi del dominio

a. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \log_x(x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{ln(x^2 + x - 2)}{ln(x)} = \frac{ln(0^+)}{ln(1^+)} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$

Quindi la retta di equazione ***x*=1 è asintoto verticale da destra** per il diagramma della funzione.

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \log_x(x^2 - x + 2) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ln(x^2 - x + 2)}{ln(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$, si tratta di una forma indeterminata. Si può applicare la regola di de l'Hôpital; si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{ln(x^2 - x + 2)}{ln(x)} \overset{H.}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2x-1}{x^2 - x + 2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(2x-1)}{x^2 - x + 2} = 2$$

La retta di equazione **y=2 è asintoto orizzontale** per *x*→+∞.

5. Per maggiori informazioni sull'andamento del diagramma della funzione si può studiare la disuguaglianza *f*(*x*)<2.

a. Per 1<*x*<2 si ha: $\log_x(x^2 + x - 2) < 2 \Leftrightarrow 0 < x^2 + x - 2 < x^2$, da cui $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$. Il sistema è soddisfatto da ogni punto dell'intervallo]1;2[.

b. Per *x*>2 si ha: $\log_x(x^2 - x + 2) < 2 \Leftrightarrow$ $0 < x^2 - x + 2 < x^2$, da cui $\begin{cases} x^2 - x + 2 > 0 \\ x > 2 \end{cases}$. Il sistema è soddisfatto per ogni *x*>2.

c. Dai risultati ottenuti emerge che il diagramma della funzione per ogni *x*≠2 giace al di sotto della retta y=2, inoltre, osservato che *f*(2)=2, si conclude che il punto **x=2 è di massimo assoluto.**

6. Il diagramma della funzione è riportato nella figura a margine.